ETH Zürich
Chair of Software Engineering

Einführung in die Programmierung

Prof. Dr. Bertrand Meyer

Lektion 15: Topologisches Sortieren

Teil 1: Problemstellung und mathematische Basis
Teil 2: Algorithmus und Implementation

Teil 1

Problemstellung und mathematische Basis

Un dîner en famille.

by Caran d'Ache

– Surtout ! ne parlons pas de l'affaire Dreyfus!

... Ils en ont parlé ...

“Topologisches Sortieren”

Aus einer gegebenen partiellen Ordnung eine totale Ordnung produzieren.

Die Problemstellung

Aus einer gegebenen partiellen Ordnung eine totale Ordnung produzieren

Partielle Ordnung: Ordnungsbedingung zwischen Elementen einer Menge, z.B.

- "Das Abwaschen kommt *vor* der politischen Diskussion"
- "Die Wanderung auf den Üetliberg kommt *vor* dem Essen"
- "Das Medikament muss *vor* dem Essen eingenommen werden"
- "Das Essen kommt *vor* dem Abwaschen"

Totale Ordnung: Eine Sequenz, die alle Elemente der Menge beinhaltet

Kompatibel: Die Sequenz berücksichtigt alle Ordnungsstrukturen

- *Üetliberg, Medikament, Essen, Abwaschen, Politik* : OK
- *Medikament, Üetliberg, Essen, Abwaschen, Politik* : OK
- *Politik, Medikament, Essen, Abwaschen, Üetliberg* : not OK

Warum dieses Beispiel wichtig ist

- Häufiges Problem, präsent in vielen verschiedenen Gebieten
- Interessanter, nicht trivialer (aber auch nicht zu komplizierter) Algorithmus
- Erläutert die Techniken von Algorithmen, Datenstrukturen, Komplexität und anderen Themen der letzten Lektion
- Erklärt Techniken des Software-Engineerings
- Beschreibt wichtige mathematische Konzepte: binäre Relationen und im Speziellen Ordnungsrelationen
- Es ist einfach schön!

Heute: Problemstellung und mathematische Basis

Nächstes Mal: Algorithmus und Konzept im Detail

Topologisches Sortieren: Anwendungsbeispiele

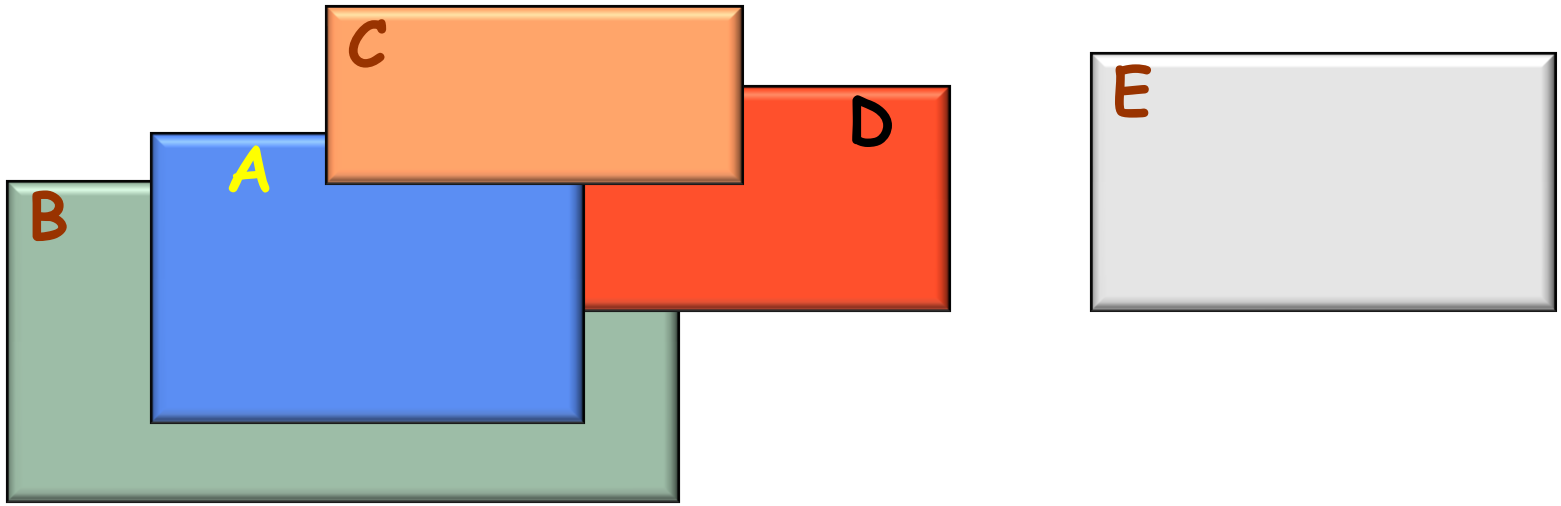
- „Erzeuge aus einem Wörterbuch eine Liste von Definitionen („Glossar"), so dass kein Wort vor seiner Definition steht"

- Erstellung eines kompletten Zeitablaufs für die Ausführung von Aufgaben mit Ordnungsauflagen
  (Häufige Anwendung: „Scheduling" von Unterhaltsarbeiten in der Industrie, oft mit tausenden von Einschränkungen)

- Eine neue Version einer Klasse mit neuer Reihenfolge der Features generieren, so dass kein Feature ein anderes, vor ihm deklariertes aufruft

Rechtecke mit Überlappungsauflagen

Bedingungen: [B, A], [D, A], [A, C], [B, D], [D, C]

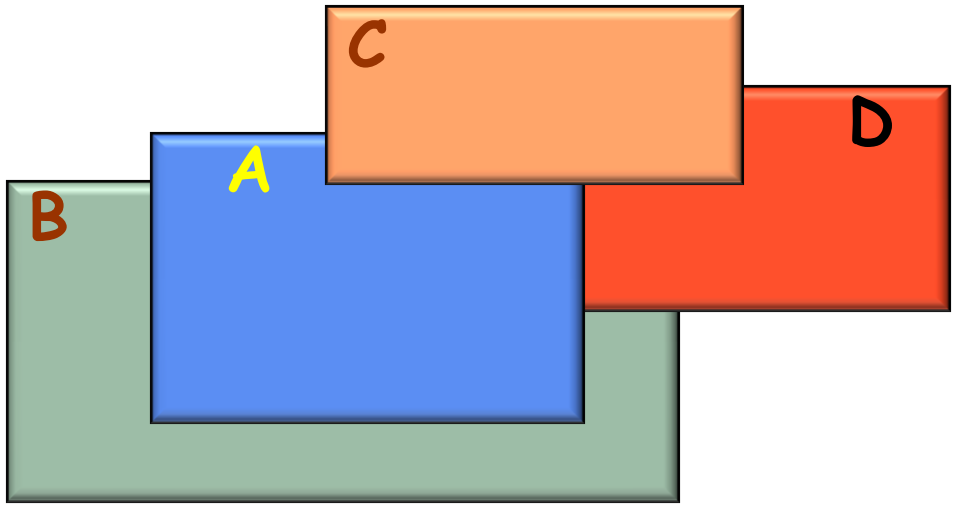


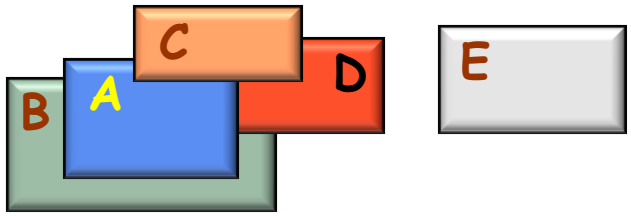
Rechtecke mit Überlappungsauflagen darstellen

Bedingungen: [B, A], [D, A], [A, C], [B, D], [D, C]

Mögliche Reihenfolge der Anzeige:

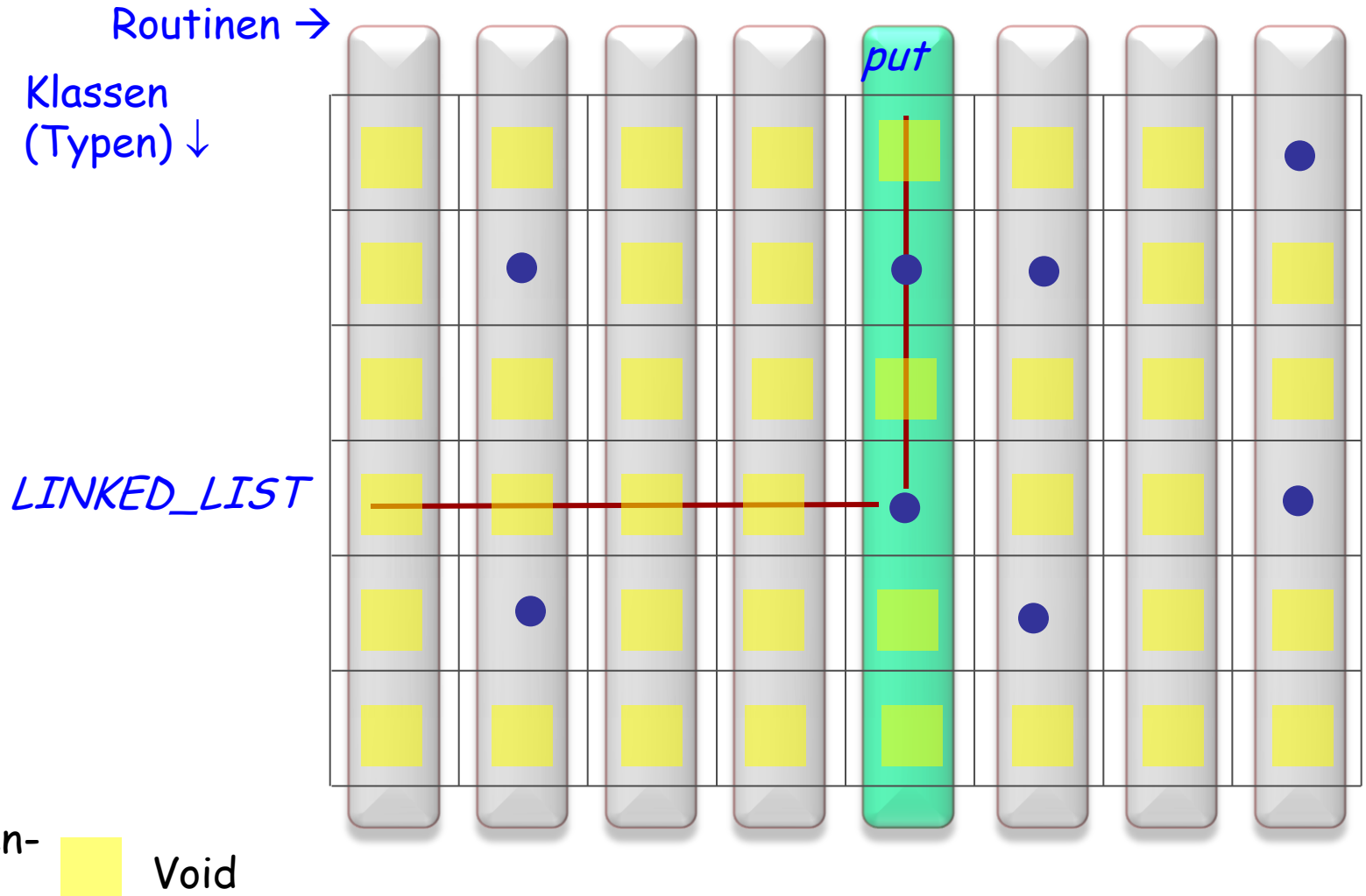
B D E A C





Ein Beispiel in EiffelStudio

Um *x.f* mit dynamischem Binden zu implementieren, brauchen wir eine Tabelle der Routinen



Eine Übung!

Finden Sie, im EiffelStudio-Quellcode, die Namen der Datenstrukturen, die die Tabelle oder Tabellen der vorhergehenden Folie darstellen

Die Problemstellung

Aus einer gegebenen partiellen Ordnung eine totale Ordnung produzieren

Partielle Ordnung: Ordnungsbedingung zwischen Elementen einer Menge, z.B.

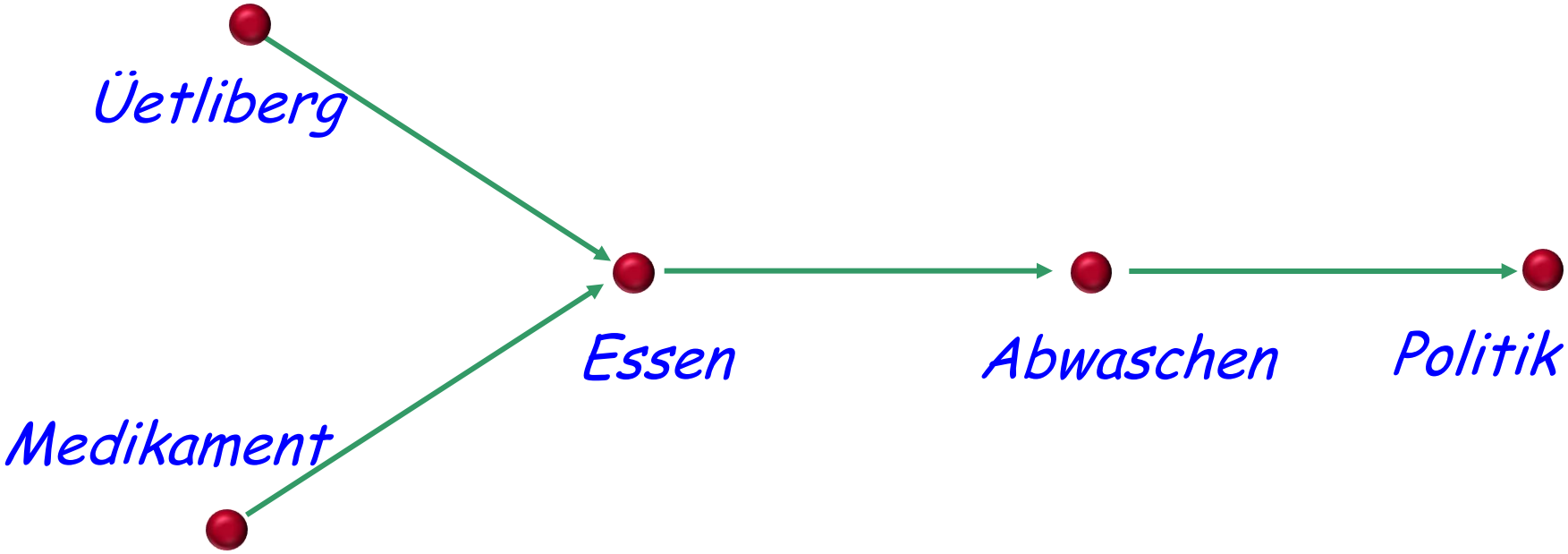
- "Das Abwaschen kommt *vor* der politischen Diskussion"
- "Die Wanderung auf den Üetliberg kommt *vor* dem Essen"
- "Das Medikament muss *vor* dem Essen eingenommen werden"
- "Das Essen kommt *vor* dem Abwaschen"

Totale Odnung: Eine Sequenz, die alle Elemente der Menge beinhaltet

Kompatibel: Die Sequenz berücksichtigt alle Ordnungsstrukturen

- *Üetliberg, Medikament, Essen, Abwaschen, Politik* : OK
- *Medikament, Üetliberg, Essen, Abwaschen, Politik* : OK
- *Politik, Medikament, Essen, Abwaschen, Üetliberg* : not OK

Als Graph dargestellt



"Das Abwaschen kommt *vor* der politischen Diskussion"
"Die Wanderung auf den Üetliberg kommt *vor* dem Essen"
"Das Medikament muss *vor* dem Essen eingenommen werden"
"Das Essen kommt *vor* dem Abwaschen"

Manchmal gibt es keine Lösung

- *"Die Einführung der Rekursion erfordert, dass die Studenten Stapel kennen."*
- *"Abstrakte Datentypen müssen vor Stapel behandelt werden.*
- *"Abstrakte Datentypen beruhen auf Rekursion"*

Die Bedingungen erzeugen einen ZYKLUS (Kreis).

Allgemeine Struktur (1)

Gegeben:

Ein Typ *G*

Eine Menge von Elementen vom Typ *G*

Eine Menge von Bedingungen zwischen diesen Elementen

Benötigt:

Eine Aufzählung der Elemente in einer zu den Bedingungen kompatiblen Ordnung

```
class ANORDENBAR [G] feature

  elemente : LIST [G]

  auflagen : LIST [TUPLE [G, G]]

  topsort : LIST [G]
    ...
    ensure
      kompatibel (Result, auflagen)

end
```

Ein wenig mathematischer Hintergrund…

Binäre Relationen auf einer Menge

Eine Eigenschaft zwischen zwei Elementen der Menge, die entweder erfüllt oder nicht erfüllt ist.

Beispielrelationen auf einer Menge von Personen *PERSON*:

- ***Mutter*** : *a* ***Mutter*** *b* ist erfüllt genau dann, wenn *a* die Mutter von *b* ist
- ***Vater*** :
- ***Kind*** :
- ***Schwester*** :
- ***Geschwister*** :

Bemerkung: Relationen werden in **grün** dargestellt.

Notation: *a* ***r*** *b*, um auszudrücken, dass ***r*** für *a* und *b* gilt.

Beispiel: Die *vor*-Relation

Die Menge:

Aufgaben =

{*Politik, Essen, Medikament, Abwaschen, Üetliberg*}

Die einschränkende Relation:

Abwaschen ***vor*** *Politik*

Üetliberg ***vor*** *Essen*

Medikament ***vor*** *Essen*

Essen ***vor*** *Abwaschen*

"Das Abwaschen kommt *vor* der politischen Diskussion"
"Die Wanderung auf den Üetliberg kommt *vor* dem Essen"
"Das Medikament muss *vor* dem Essen eingenommen werden"
"Das Essen kommt *vor* dem Abwaschen"

Einige spezielle Relationen auf einer Menge X

universal $[X]$: ist für jedes Paar von Elementen in X erfüllt

id $[X]$: ist für jedes Element in X und sich selbst erfüllt.

empty $[X]$: ist für kein Paar von Elementen in X erfüllt.

Relationen: präzisere mathematische Betrachtung

Wir betrachten eine Relation r auf einer Menge P als:

Kartesisches Produkt

Eine **Menge von Paaren** aus $P \times P$,

die alle Paare $[x, y]$ enthält, so dass $x \underline{r} y$.

Dann heisst $x \underline{r} y$ nichts anderes als $[x, y] \in r$.

Siehe Beispiele auf der nächsten Folie.

Eine Relation ist eine Menge: Beispiele

son = {[Charles, Elizabeth], [Charles, Philip], [William, Charles], [Harry, Charles]}

Natürliche Zahlen

id [ℕ] = {[0, 0], [1, 1], [2, 2], [3, 3], [4, 4], ...}

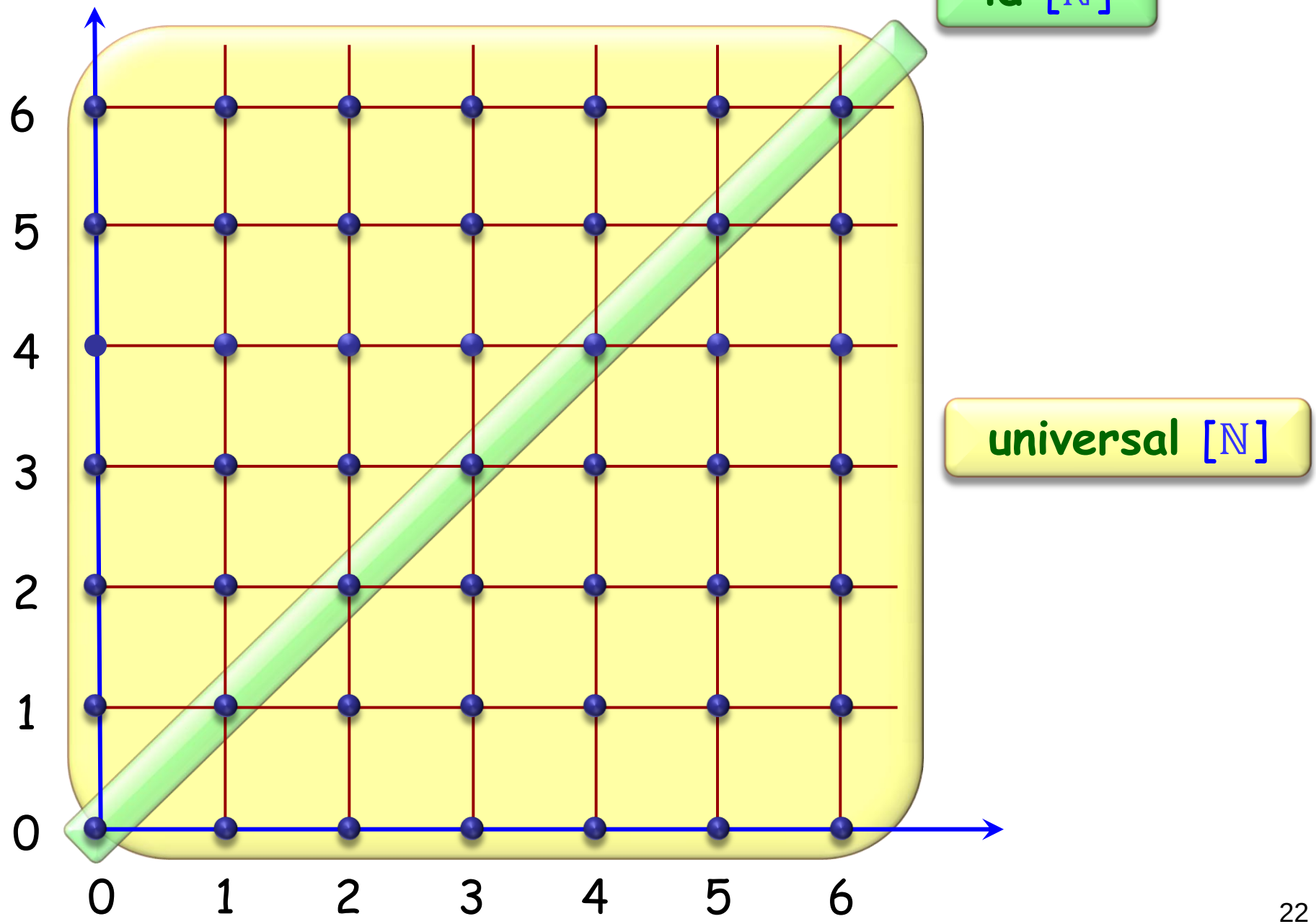
universal [ℕ] = {[0, 0], [0, 1], [0, 2], [0, 3], [0, 4], ...
[1, 0], [1, 1], [1, 2], [1, 3], [1, 4], ...
[2, 0], [2, 1], [2, 2], [2, 3], [2, 4], ...
... }

= ℕ × ℕ

empty [*X*] = ∅

= { }

Illustration der Relationen



Beispiel: Die *vor*-Relation

"Das Abwaschen kommt *vor* der politischen Diskussion"
"Die Wanderung auf den Üetliberg kommt *vor* dem Essen"
"Das Medikament muss *vor* dem Essen eingenommen werden"
"Das Essen kommt *vor* dem Abwaschen"

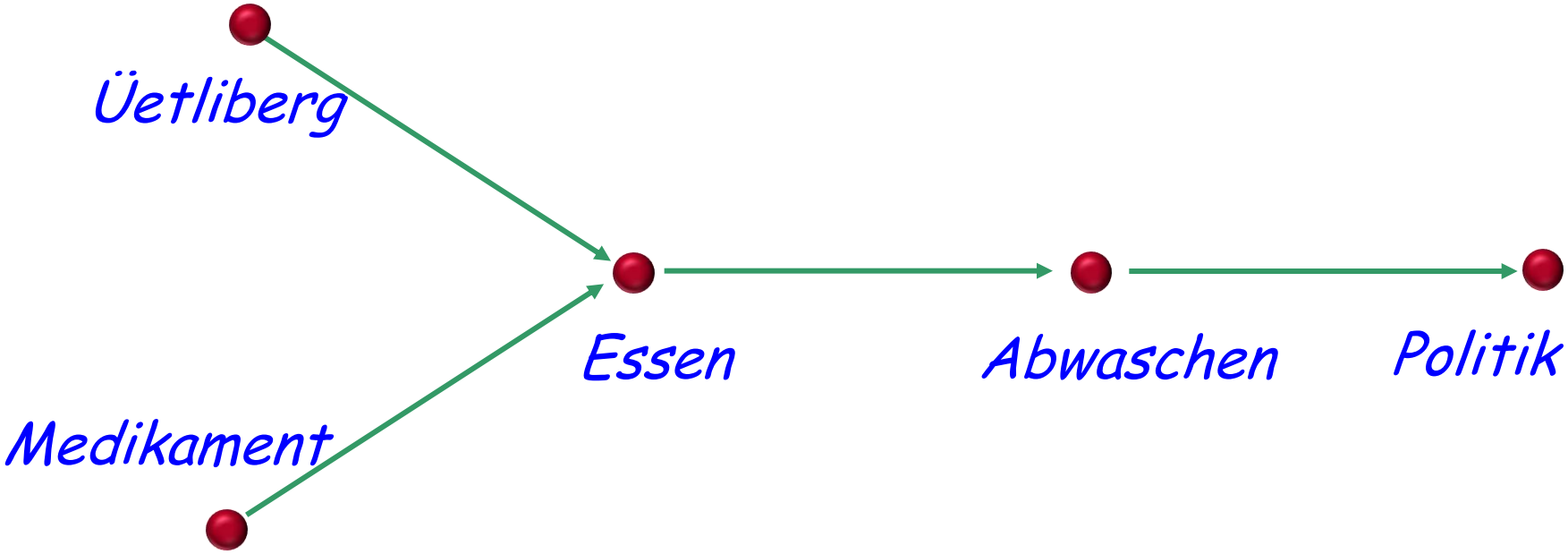
Unsere Menge:

elemente = {*Politik, Essen, Medikament, Abwaschen, Üetliberg*}

Die einschränkende Relation:

vor = {[*Abwaschen, Politik*], [*Üetliberg, Essen*], [*Medikament, Essen*], [*Essen, Abwaschen*]}

Als Graph dargestellt



"Das Abwaschen kommt *vor* der politischen Diskussion"
"Die Wanderung auf den Üetliberg kommt *vor* dem Essen"
"Das Medikament muss *vor* dem Essen eingenommen werden"
"Das Essen kommt *vor* dem Abwaschen"

Einfache Operationen auf eine Menge

Konvention: Sie sind ihr eigenes Geschwister.

$Gatte = Ehefrau \cup Ehemann$

$Geschwister = Schwester \cup Bruder \cup \mathrm{id}\,[Person]$

$Schwester \subseteq Geschwister$

$Vater \subseteq Vorfahre$

universal $[X] = X \times X$

empty $[X] = \varnothing$

Mögliche Eigenschaften einer Relation

(Auf einer Menge X. Alle Definitionen müssen für jedes Element von X erfüllt sein.)

Total*:	$(a \neq b) \Rightarrow ((a \underline{r} b) \vee (b \underline{r} a))$
Reflexiv:	$a \underline{r} a$
Irreflexiv:	**not** $(a \underline{r} a)$
Symmetrisch:	$a \underline{r} b \Rightarrow b \underline{r} a$
Antisymmetrisch:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a) \Rightarrow a = b$
Asymmetrisch:	**not** $((a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a))$
Transitiv:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} c) \Rightarrow a \underline{r} c$

*Die Definition von "total" ist spezifisch für diese Diskussion (es gibt dafür keine Standarddefinition). Die restlichen Begriffe sind standardisiert.

Beispiele (auf einer Menge von Personen)

Geschwister	Reflexiv, symmetrisch, transitiv
Schwester	irreflexiv
Familienoberhaupt	reflexiv, antisymmetrisch (*a* ***Familienoberhaupt*** *b* heisst, dass *a* das Oberhaupt von *b*'s Familie ist.(Ein Oberhaupt pro Familie))
Mutter	asymmetrisch, irreflexiv

Total:	$(a \neq b) \Rightarrow (a \underline{r} b) \vee (b \underline{r} a)$
Reflexiv:	$a \underline{r} a$
Irreflexiv:	**not** $(a \underline{r} a)$
Symmetrisch:	$a \underline{r} b \Rightarrow b \underline{r} a$
Antisymmetrisch:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a) \Rightarrow a = b$
Asymmetrisch:	**not** $((a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a))$
Transitiv:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} c) \Rightarrow a \underline{r} c$

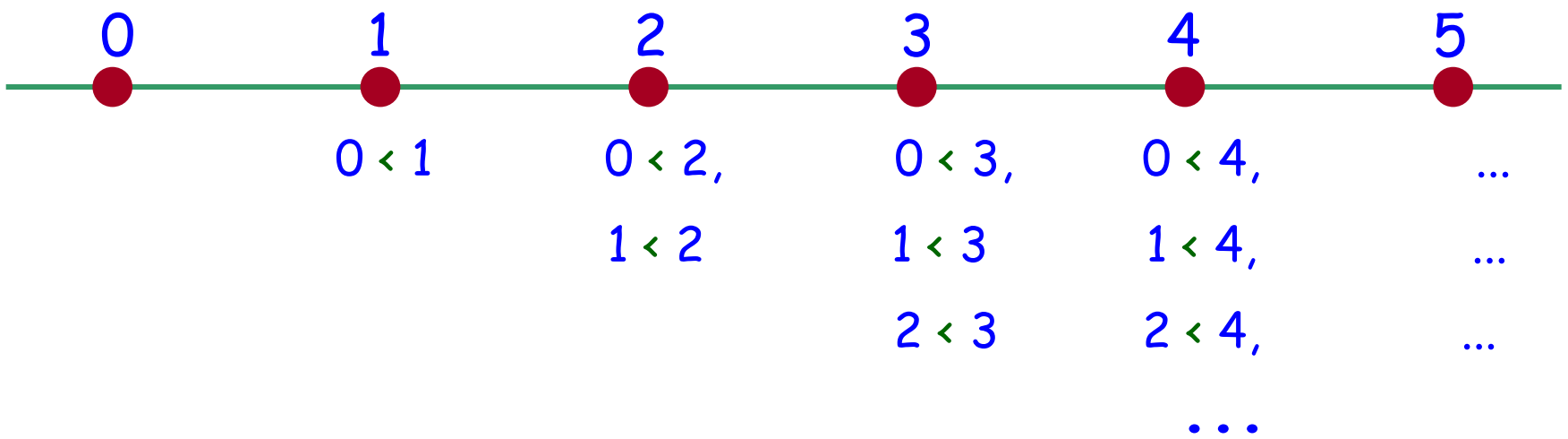
Totale Ordnungsrelation (strikt)

Eine Relation ist eine strikte totale Ordnung falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- Total
- Irreflexiv
- Transitiv

Total:	$(a \neq b) \Rightarrow (a \underline{r} b) \vee (b \underline{r} a)$
Reflexiv:	$a \underline{r} a$
Irreflexiv:	**not** $(a \underline{r} a)$
Symmetrisch:	$a \underline{r} b \Rightarrow b \underline{r} a$
Antisymmetrisch:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a) \Rightarrow a = b$
Asymmetrisch:	**not** $((a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a))$
Transitiv:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} c) \Rightarrow a \underline{r} c$

Beispiel: "kleiner als" $<$ auf natürlichen Zahlen



Theorem

Eine strikte (totale) Ordnungsrelation ist asymmetrisch

Totale Ordnungsrelation (strikt)

Eine Relation ist eine strikte totale Ordnungsrelation, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- Total
- Irreflexiv
- Transitiv

Total:	$(a \neq b) \Rightarrow (a \underline{r} b) \vee (b \underline{r} a)$
Reflexiv:	$a \underline{r} a$
Irreflexiv:	**not** $(a \underline{r} a)$
Symmetrisch:	$a \underline{r} b \Rightarrow b \underline{r} a$
Antisymmetrisch:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a) \Rightarrow a = b$
Asymmetrisch:	**not** $((a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a))$
Transitiv:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} c) \Rightarrow a \underline{r} c$

Theorem: Eine strikte (totale) Ordnungsrelation ist asymmetrisch.

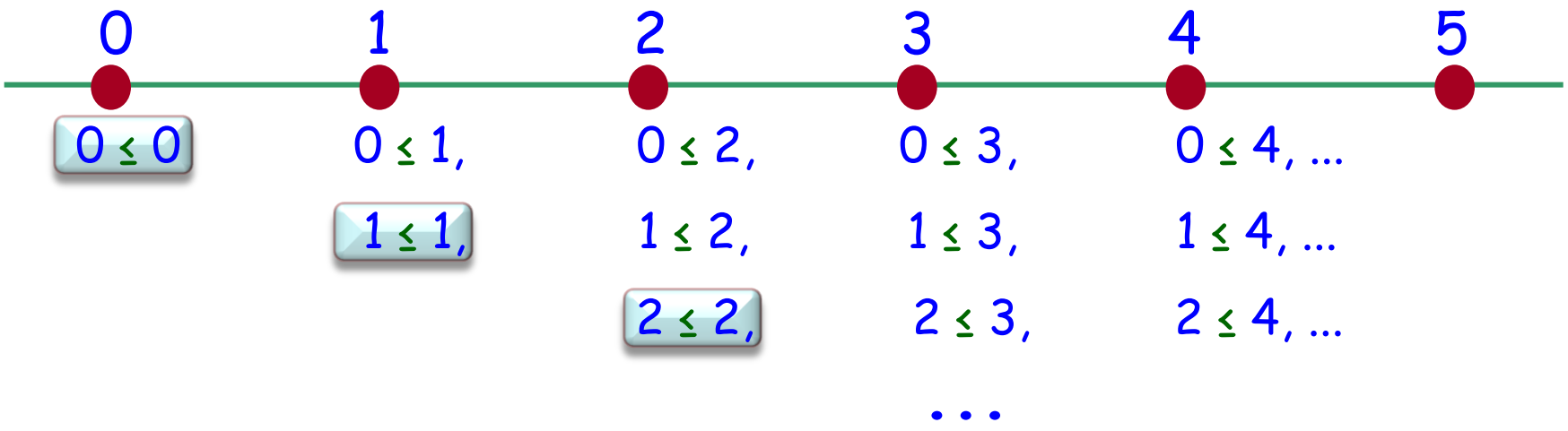
Totale Ordnungsrelation (nicht-strikt)

Eine Relation ist eine nicht-strikte Ordnungsrelation, falls sie folgende Eigenschaften hat:

- Total
- Reflexiv
- Transitiv
- Antisymmetrisch

Total:	$(a \neq b) \Rightarrow (a \underline{r} b) \vee (b \underline{r} a)$
Reflexiv:	$a \underline{r} a$
Irreflexiv:	**not** $(a \underline{r} a)$
Symmetrisch:	$a \underline{r} b \Rightarrow b \underline{r} a$
Antisymmetrisch:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a) \Rightarrow a = b$
Asymmetrisch:	**not** $((a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a))$
Transitiv:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} c) \Rightarrow a \underline{r} c$

Beispiel: "kleiner als oder gleich" $\leq$ auf natürlichen Zahlen



Totale Ordnungsrelation (strikt)

Eine Relation ist eine strikte totale Ordnungsrelation, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- Total
- Irreflexiv
- Transitiv

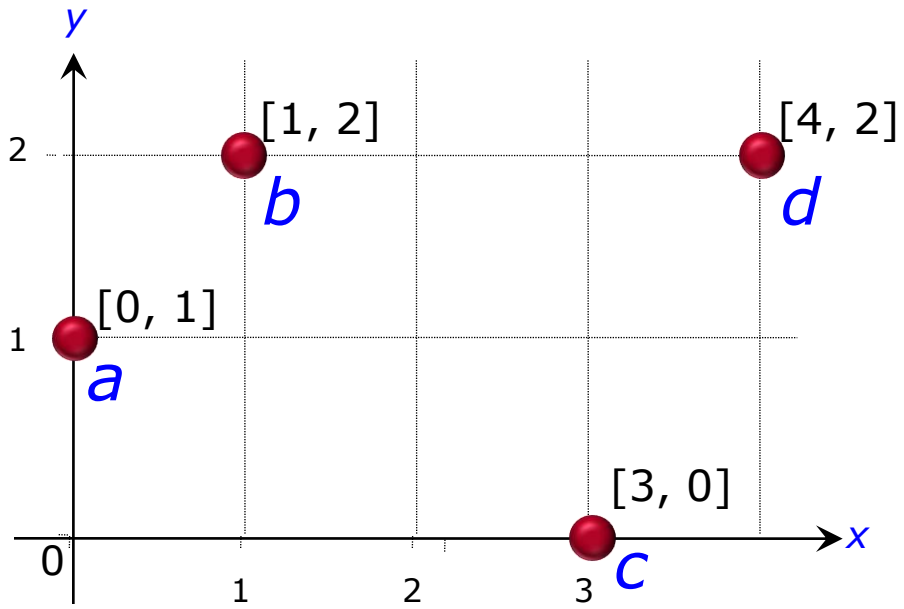
Total:	$(a \neq b) \Rightarrow (a \underline{r} b) \vee (b \underline{r} a)$
Reflexiv:	$a \underline{r} a$
Irreflexiv:	**not** $(a \underline{r} a)$
Symmetrisch:	$a \underline{r} b \Rightarrow b \underline{r} a$
Antisymmetrisch:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a) \Rightarrow a = b$
Asymmetrisch:	**not** $((a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a))$
Transitiv:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} c) \Rightarrow a \underline{r} c$

Partielle Ordnungsrelation (strikt)

Eine Relation ist eine strikte partielle Ordnungsrelation, falls sie folgende Eigenschaften erfüllt:

- ~~total~~
- irreflexiv
- transitiv

Total:	$(a \neq b) \Rightarrow (a \underline{r} b) \vee (b \underline{r} a)$
Irreflexiv:	**not** $(a \underline{r} a)$
Symmetrisch:	$a \underline{r} b \Rightarrow b \underline{r} a$
Antisymmetrisch:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} a) \Rightarrow a = b$
Transitiv:	$(a \underline{r} b) \wedge (b \underline{r} c) \Rightarrow a \underline{r} c$



Beispiele: Relation zwischen Punkten in einer Ebene:

$p \leqslant q$ falls:

- $x_p < x_q$
- $y_p < y_q$

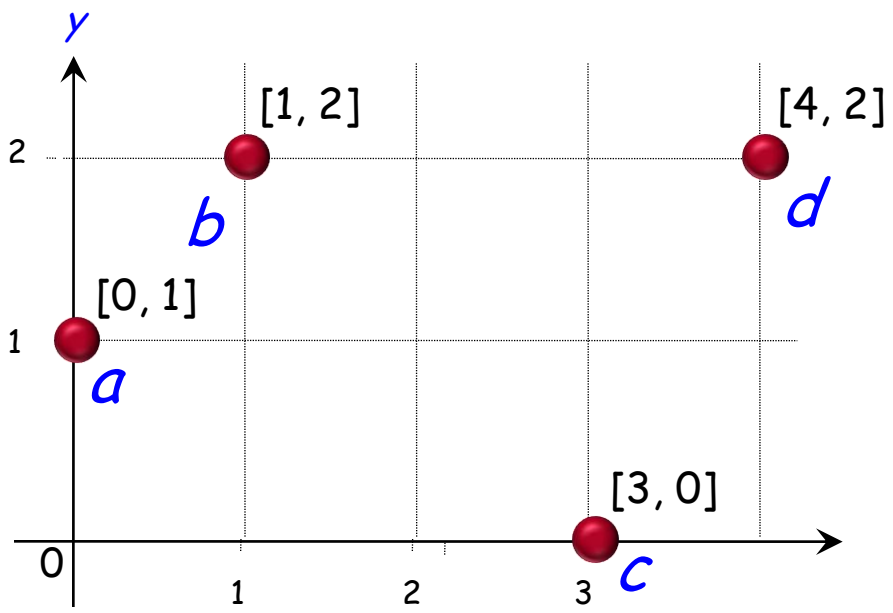
Theoreme

Eine strikte (partielle / totale) Ordnungsrelation ist asymmetrisch

Eine totale Ordnungsrelation ist (auch!) eine partielle Ordnungsrelation

("partiell" heisst eigentlich möglicherweise partiell)

Beispiel einer partiellen Ordnung



$p \lessdot q$ falls:

- $x_p < x_q$
- $y_p < y_q$

Hier gilt:

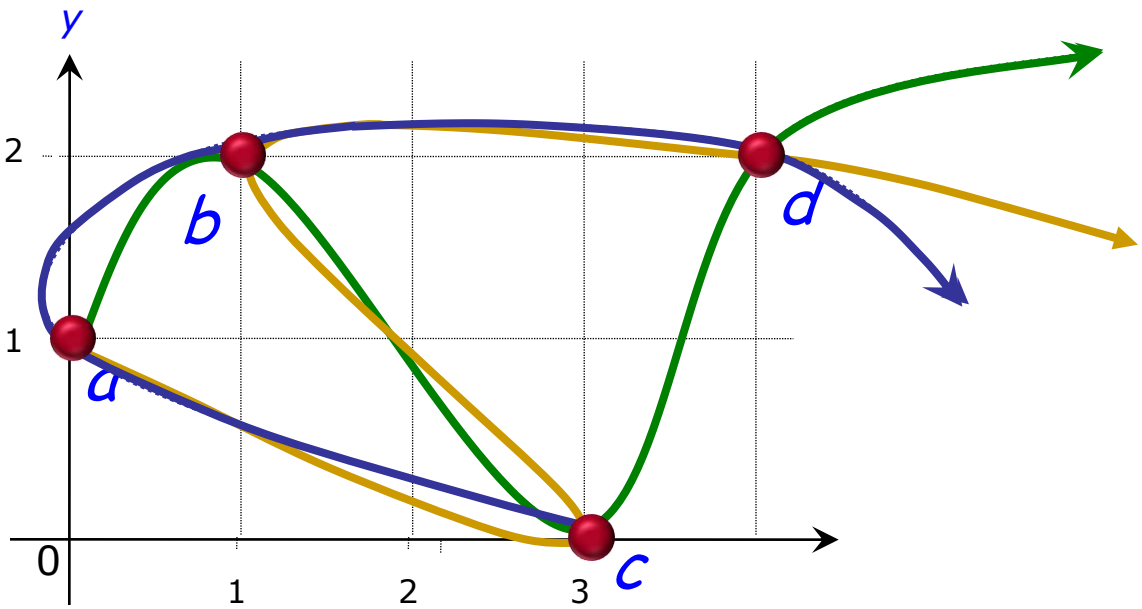
$a \lessdot b$ $c \lessdot d$

$a \lessdot d$

Keine Verbindung zwischen a und c, b und c:

z.B. Weder $a \lessdot c$ noch $c \lessdot a$

Mögliche topologische Sortierungen



a b c d

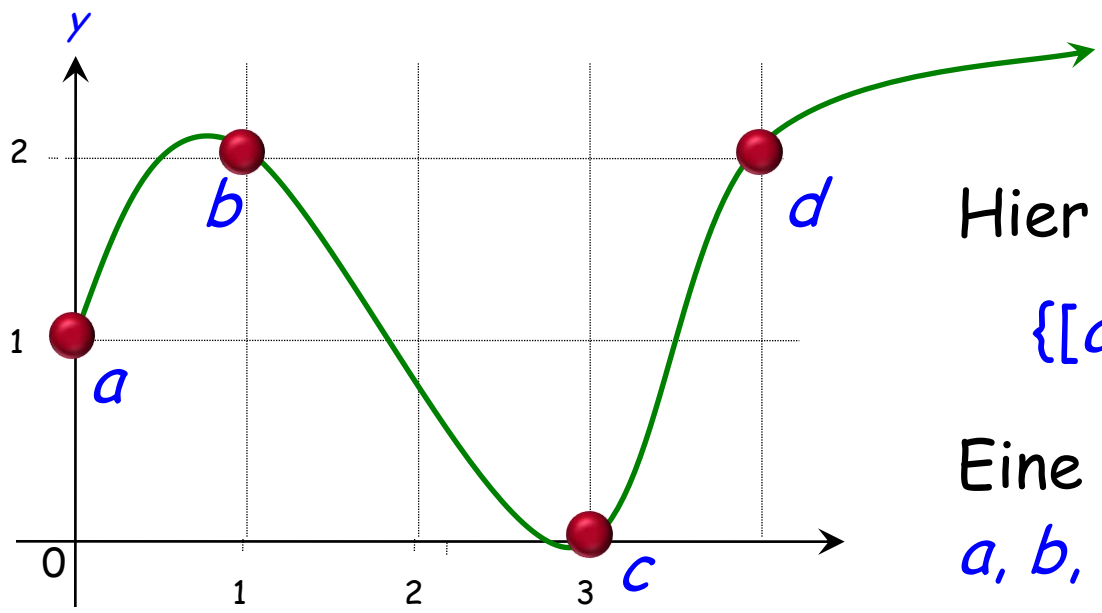
c a b d

a c b d

$a \lessdot b \quad c \lessdot d$

$a \lessdot d$

Topologisches Sortieren verstanden



Hier ist die Relation $\lessdot$

$\{[a, b], [a, d], [c, d]\}$

Eine Lösung ist:

a, b, c, d

$a \lessdot b \quad c \lessdot d$

$a \lessdot d$

Wir suchen eine totale Ordnungsrelation t, so dass

$\lessdot \subseteq t$

Topologisches Sortieren: Endgültige Problemstellung

Aus einer partiellen Ordnung eine kompatible totale Ordnung erzeugen.

wobei:

Eine partielle Ordnung p ist kompatibel mit einer totalen Ordnung t genau dann, wenn

$$p \subseteq t$$

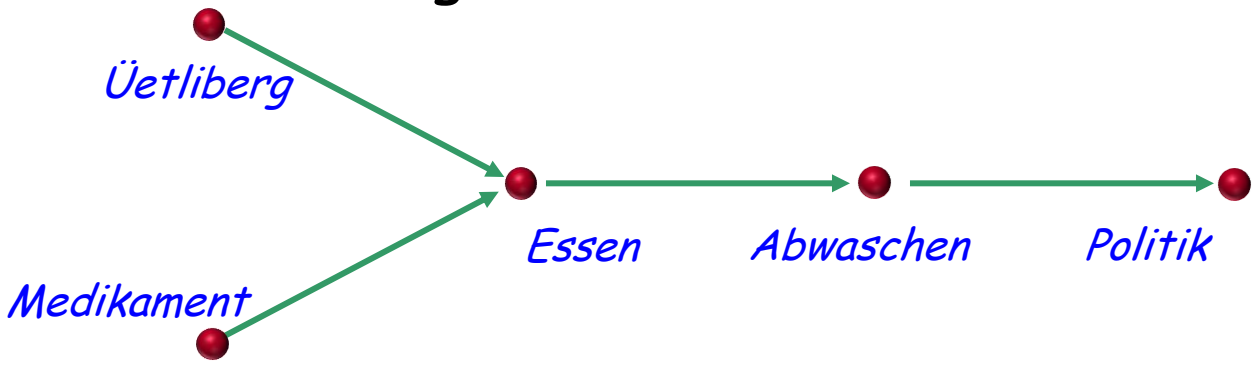
Von Bedingungen zu partiellen Ordnungen

Ist eine durch folgende Menge von Bedingungen definierte Relation, wie zum Beispiel

auflagen =

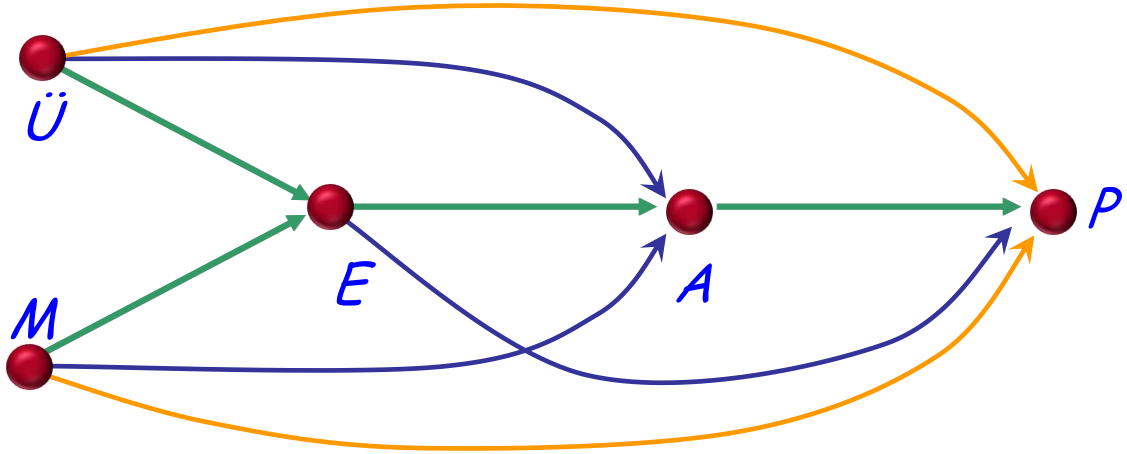
{[*Abwaschen, Politik*], [*Üetliberg, Essen*], [*Medikament, Essen*], [*Essen, Abwaschen*]}

immer eine partielle Ordnung?



Potenzen und transitive Hülle von Relationen

$r^{i+1} = r^i ; r$ wobei ; die Zusammensetzung ist



Transitive Hülle (*Transitive closure*)

$r^+ = r^1 \cup r^2 \cup \ldots$

-- Immer transitiv

r^1

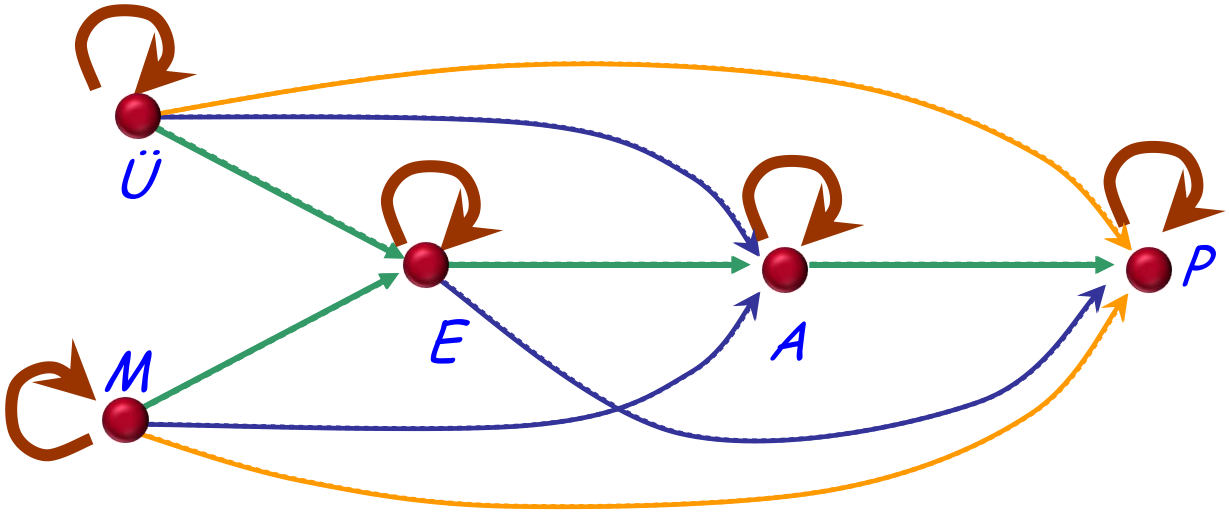
r^2

r^3

Reflexive transitive Hülle

$r^0 = id\ [X]$ wobei X die zugrunde liegende Menge ist

$r^{i+1} = r^i ; r$ wobei ; die Zusammensetzung ist



Transitive Hülle

$r^+ = r^1 \cup r^2 \cup \ldots$ immer transitiv

r^0

r^1

r^2

r^3

reflexive transitive Hülle:

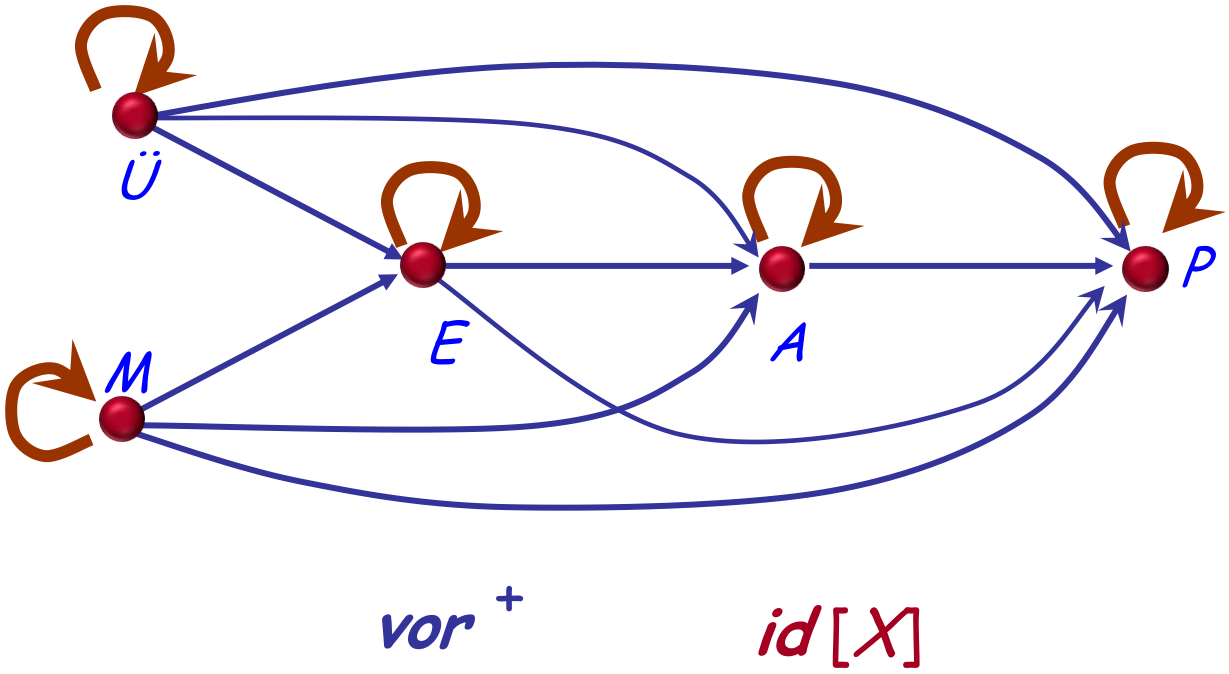
$r^* = r^0 \cup r^1 \cup r^2 \cup \ldots$

-- Immer transitiv **und** reflexiv

Azyklische Relation

Eine Relation r auf einer Menge X ist azyklisch genau dann, wenn:

$$r^+ \cap id[X] = \emptyset$$



Azyklische Relationen und partielle Ordnungen

Theoreme:

- Jede (strikte) Ordnungsrelation ist azyklisch

- Eine Relation ist azyklisch genau dann, ihre transitive Hülle eine (strikte) Ordnung ist

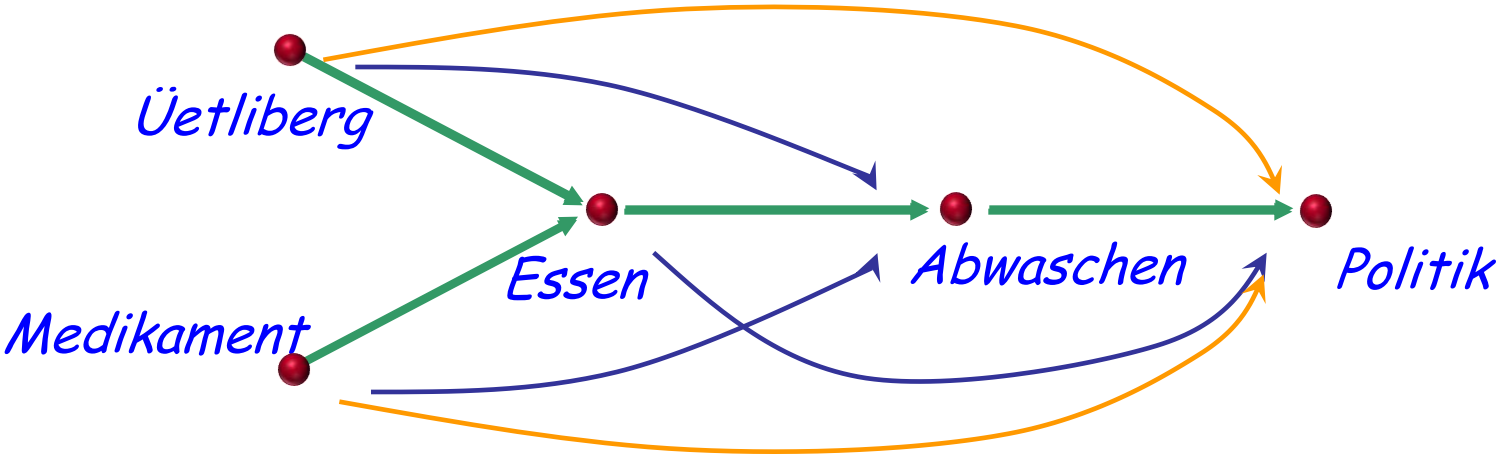
  (auch: Genau dann, wenn ihre reflexive transitive Hülle eine nicht-strikte partielle Ordnung ist)

Von den Bedingungen zur partiellen Ordnung

Unsere partielle Ordnungsrelation ist ***vor*** $^+$

vor =

{[*Abwaschen, Politik*], [*Üetliberg, Essen*],
[*Medikament, Essen*], [*Essen, Abwaschen*]}



Was wir gesehen haben

Das Problem des topologischen Sortierens und seine Anwendungen

Mathematischer Hintergrund:

- Relationen als Mengen von Paaren
- Eigenschaften einer Relation
- Ordnungsrelationen: partiell/total, strikt/nicht-strikt
- Transitive und reflexive transitive Hüllen
- Die Beziehung zwischen **azyklischen** und **Ordnungs**relationen
- Die Grundidee des topologischen Sortierens

Als Nächstes: Wie man es implementiert:

- Effizient: $O(m + n)$ für m Bedingungen und n Elemente
- Gutes Software-Engineering: effektives API

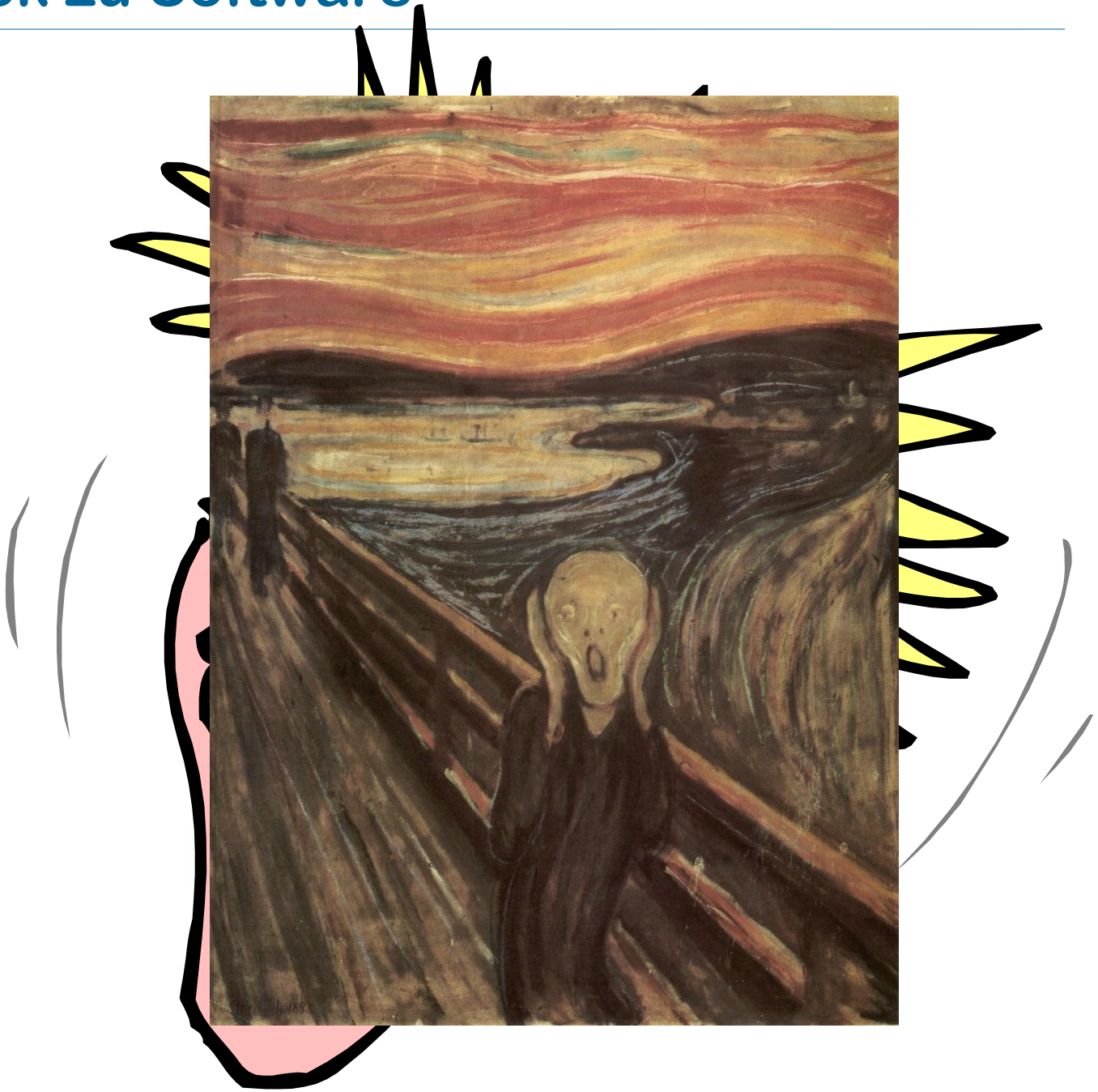
ETH Zürich
Chair of Software Engineering

Einführung in die Programmierung

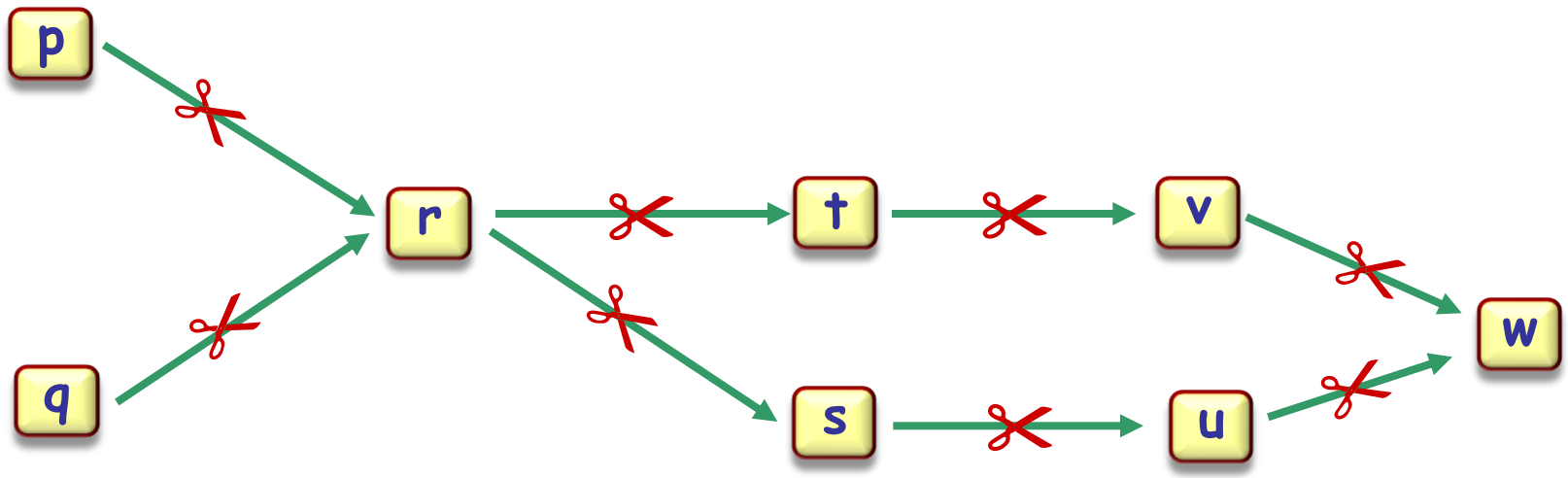
Prof. Dr. Bertrand Meyer

Lektion 15: Topologisches Sortieren
Teil 2: Algorithmus und Implementation

Zurück zu Software



Die Grundidee des Algorithmus



topsort

Allgemeine Struktur (erster Versuch)

Gegeben:

Ein Typ *G*

Eine Menge von Elementen des Typs *G*

Eine Relation *auflagen* auf diesen Elemente

Benötigt:

Eine Aufzählung der Elemente, kompatibel mit *auflagen*.

```
class
    TOPOLOGISCH_SORTIERBAR [G]
feature
    auflagen : LINKED_LIST [TUPLE [G, G]]

    elemente : LINKED_LIST [G]



    topologisch_sortiert : LINKED_LIST [G]
        require
            zyklus_frei (auflagen)
        do
            ...
        ensure
            kompatibel (Result, auflagen)
        end
end
```

Allgemeine Struktur (verbessert)

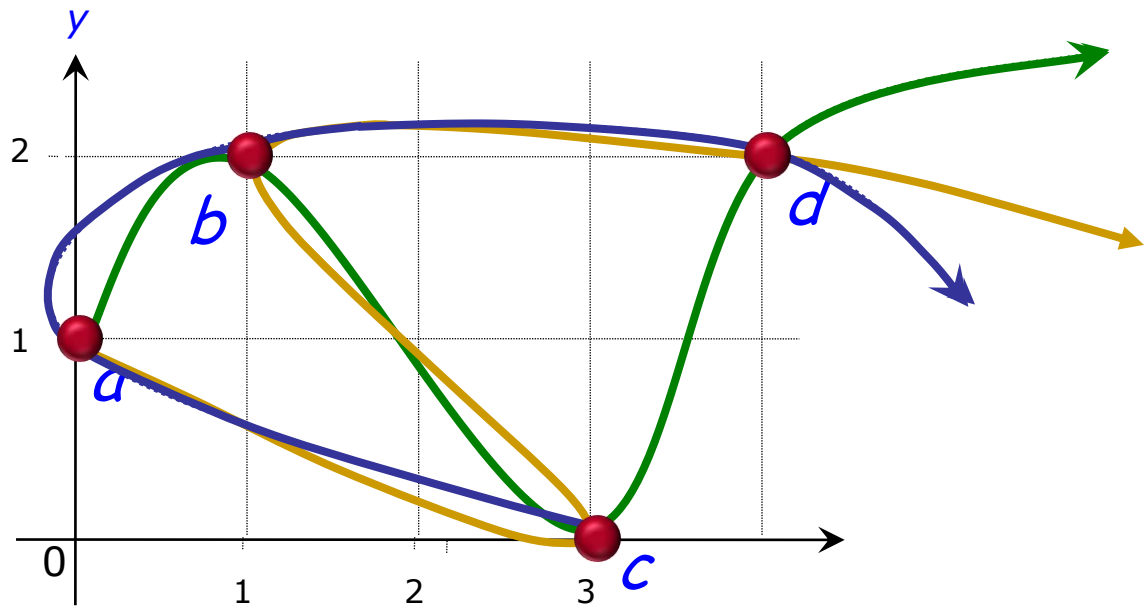
Wir benutzen statt einer Funktion *topologisch_sortiert*:

- Eine Prozedur *führe_aus*.
- Ein Attribut ***sortiert*** (gesetzt von ***führe_aus***), welches das Resultat enthält.

```
class
    TOPOLOGISCH_SORTIERER [G]
feature
    auflagen : LINKED_LIST [TUPLE [G, G]]

    elemente : LINKED_LIST [G]

    sortiert : LINKED_LIST [G]

    führe_aus
        require
            zyklus_frei (auflagen)
        do
            ...
        ensure
            kompatibel (sortiert, auflagen)
        end
end
```

Fehlende Eindeutigkeit

Im Allgemeinen gibt es mehrere Lösungen



a b c d

c a b d

a c b d

In der Praxis benutzt das topologische Sortieren ein Optimierungskriterium, um zwischen möglichen Lösungen zu entscheiden.

Eine partielle Ordnung ist azyklisch

Die Relation $\lessdot$:

- Muss eine Partielle Ordnung sein: Keine Zyklen in der transitiven Hülle von ***auflagen***.
- Das heisst es gibt keine zirkuläre Liste der Form

$$e_0 \lessdot e_1 \lessdot \ldots \lessdot e_n \lessdot e_0$$

Falls es einen solchen Zyklus gibt, existiert keine Lösung für das Problem!

Zyklen

Bei der topologischen Sortierung erhalten wir nicht die eigentliche Relation $\lessdot$, sondern eine Relation *auflagen*, durch eine Menge von Paaren wie

{[*Abwaschen, Hinaus*], [*Museum, Essen*], [*Medikament, Essen*], [*Essen, Abwaschen*]}

Die Relation, an der wir interessiert sind, ist:

$\lessdot$ ist azyklisch genau dann, wenn *auflagen* keine Paare der Form

$\{[f_0, f_1], [f_1, f_2], \ldots, [f_m, f_0]\}$

enthält. Falls ein solcher Zyklus existiert, kann es keine mit *auflagen* kompatible Ordnung geben.

Allgemeine Struktur (Erinnerung)

```
class
    TOPOLOGISCH_SORTIERER [G]
feature
    auflagen : LINKED_LIST [TUPLE [G, G]]

    elemente : LINKED_LIST [G]


    sortiert : LINKED_LIST [G]

    führe_aus
            require
                zyklus_frei (auflagen)
            do
                ...
            ensure
                kompatibel (sortiert, auflagen)
            end
end
```

Ursprüngliche Annahme

```
führe_aus
        require
                zyklus_frei (auflagen)
        do
                ...
        ensure
                kompatibel (sortiert, auflagen)
        end
```

Dies nimmt an, dass der Input keine Zyklen beinhaltet.

Eine solche Annahme ist in der Praxis nicht durchsetzbar.

Im Speziellen: Das Finden von Zyklen ist in Wirklichkeit gleich schwierig wie topologisches Sortieren!

Der Umgang mit Zyklen

Wir nehmen gar nichts an, sondern finden die Zyklen als Nebenprodukt beim topologischen Sortieren.

Das Schema für *führe_aus* ergibt sich also zu:

```
--"Versuche topologische Sortierung;
-- Zyklen werden berücksichtigt."

if "Zyklen gefunden" then
        "Zyklen ausgeben"
end
```

Allgemeine Struktur (wie vorher)

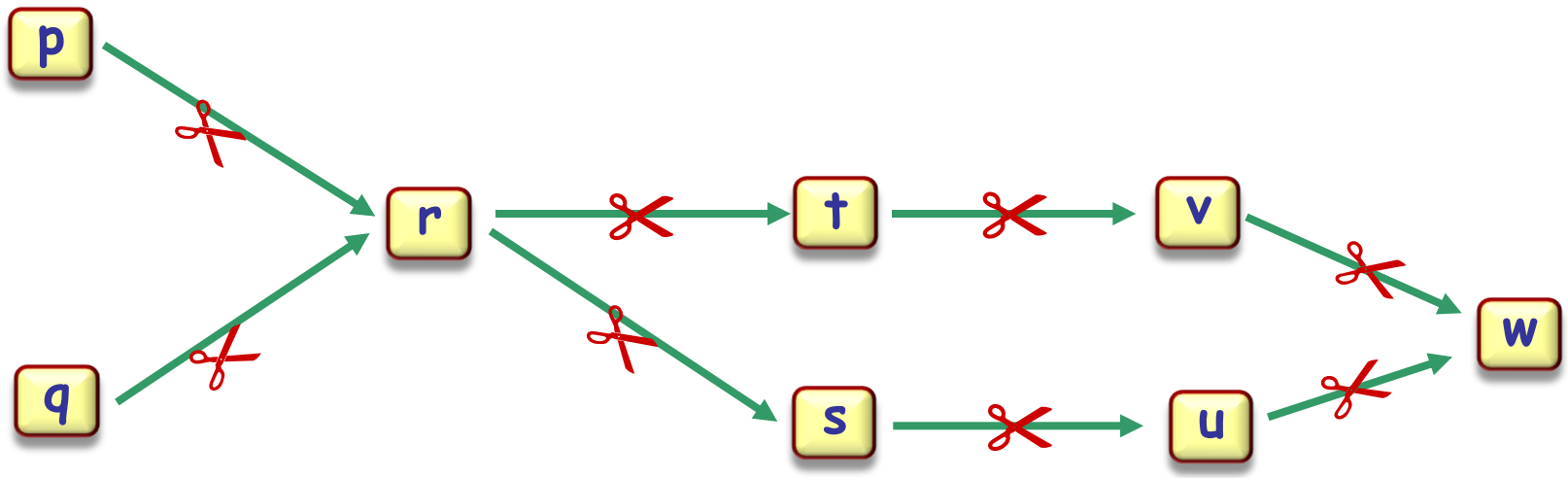
```
class
    TOPOLOGISCH_SORTIERER[G]
feature
    auflagen : LINKED_LIST [TUPLE[G, G]]
    elemente : LINKED_LIST[G]
    sortiert : LINKED_LIST[G]

    führe_aus
            require
                    zyklus_frei (auflagen)
            do
                    ...
            ensure
                    kompatibel (sortiert, auflagen)


            end
end
```

Allgemeine Struktur (endgültig)

```
class
    TOPOLOGISCH_SORTIERER [G]
feature
    auflagen : LINKED_LIST [TUPLE [G, G]]
    elemente : LINKED_LIST [G]
    sortiert : LINKED_LIST [G]

    führe_aus
            require
                    -- Keine Vorbedingung in dieser Version
            do
                    ...
            ensure
                    kompatibel (sortiert, auflagen)
            end

end
```

"*sortiert* enthält alle Elemente, die zu Beginn nicht in einen Zyklus involviert sind."

Erinnerung: Die Grundidee



topsort

Das grundsätzliche Schleifenschema

...

loop

"Finde ein Element *next* in *elemente*, für das *auflagen* keine Paare der Form [*x*, *next*] beinhaltet

sortiert.extend (next)

"Lösche *next* aus *elemente*, und entferne alle Paare der Form [*next*, *y*] aus *auflagen* "

end

Die Schleifeninvariante

Invariante in unserem ersten Versuch:

"*auflagen*$^+$ enthält keine Zyklen"

Invariante in der verbesserten Architektur:

"*auflagen*$^+$ enthält keine Zyklen, die nicht ursprünglich schon enthalten waren"

Allgemeiner:

auflagen$^+$ ist eine Teilmenge des *ursprünglichen auflagen*$^+$

Terminologie

Falls *auflagen* ein Paar [*x*, *y*], beinhaltet, sagen wir

- *x* ist ein **Vorfahre** von *y*
- *y* ist ein **Nachfolger** von *x*

Das Schema des Algoritmus

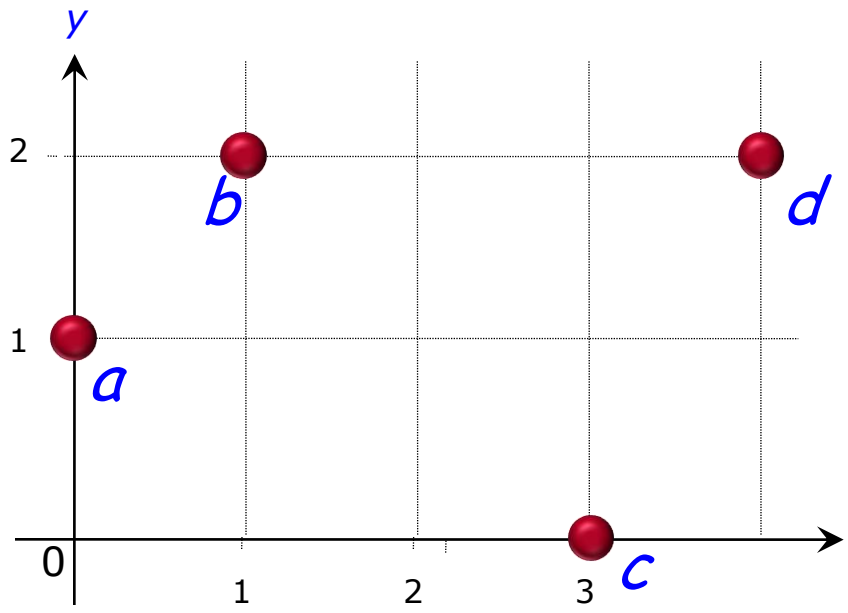
```
führe_aus
    do
        from
            create {...} sortiert.make
        invariant
            "auflagen enthält nur ursprüngliche Zyklen" and
            "sortiert ist kompatibel mit auflagen" and
            "Alle ursprünglichen Elemente sind in sortiert oder elemente"
        until
            Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        variant
            "Grösse von elemente"
        end
        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

Den Algorithmus implementieren

Wir beginnen mit diesen Datenstrukturen, die den Input direkt widerspiegeln:

```
elemente: LINKED_LIST[G]
auflagen: LINKED_LIST[TUPLE[G, G]]
```

(Anzahl Elemente: *n*
Anzahl Bedingungen: *m*)



Beispiel:

elemente = {*a*, *b*, *c*, *d*}

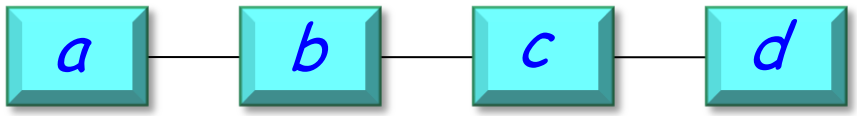
auflagen =

{[*a*, *b*], [*a*, *d*], [*b*, *d*], [*c*, *d*]}

Datenstrukturen 1: ursprünglich

elemente = {*a*, *b*, *c*, *d*}
auflagen = {[*a*, *b*], [*a*, *d*], [*b*, *d*], [*c*, *d*]}

elemente



n Elemente

auflagen

m Bedingungen

Effizienz: Das Beste, das wir uns erhoffen können, ist:
O (*m* + *n*)

Grundoperationen

```
führe_aus
    do
        from
            create {...} sortiert.make
        invariant
            "auflagen enthält nur ursprüngliche Zyklen" and
            "sortiert ist kompatibel mit auflagen" and
            "Alle ursprünglichen Elemente sind in sortiert oder elemente"
        until
            Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        variant
            "Grösse von elemente"
        end
        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

Die Operationen, die wir brauchen (*n* mal)

- Herausfinden, ob es ein Element ohne Vorfahren gibt. (Und dann eines davon nehmen.)
- Ein gegebenes Element von der Menge der Elemente entfernen.
- Alle Bedingungen, die mit einem gegebenen Element beginnen, aus der Menge der Bedingungen entfernen.
- Herausfinden, ob noch ein Element vorhanden ist.

Effizienz

Das Beste, das wir uns erhoffen können

$$O(m + n)$$

(da wir jede Bedingung und jedes Element mindestens einmal betrachten müssen)

Grundoperationen

```
führe_aus
    do
        from
            create {...} sortiert.make
        invariant
            "auflagen enthält nur ursprüngliche Zyklen" and
            "sortiert ist kompatibel mit auflagen" and
            "Alle ursprünglichen Elemente sind in sortiert oder elemente"
        until
            "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        variant
            "Grösse von elemente"
        end
        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

n mal

n mal

n mal

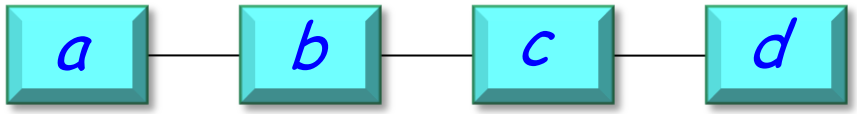
m mal

n mal

Datenstrukturen 1: ursprünglich

elemente = {*a*, *b*, *c*, *d*}
auflagen = {[*a*, *b*], [*a*, *d*], [*b*, *d*], [*c*, *d*]}

elemente



n Elemente

auflagen

m Bedingungen

Effizienz: Das Beste, das wir uns erhoffen können:

Wenn wir *elemente* und *auflagen* wie gegeben verwenden, können wir **O** (*m* + *n*) nicht erreichen!

Grundoperationen

```
führe_aus
    do
        from
            create {...} sortiert.make
        invariant
            "auflagen enthält nur ursprüngliche Zyklen" and
            "sortiert ist kompatibel mit auflagen" and
            "Alle ursprünglichen Elemente sind in sortiert oder elemente"
        until
            "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        variant
            "Grösse von elemente"
        end
        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

n mal

n mal

n mal

m mal

n mal

Den Algorithmus implementieren

Eine bessere interne Repräsentation wählen

- Jedes Element hat eine Nummer (Dies erlaubt uns, Arrays zu benutzen)

- Wir repräsentieren *auflagen* in einer Form, die dem entspricht, was wir von der Struktur wollen:
  - "Finde *next* , so dass *auflagen* kein Paar der Form [*y, next*] beinhaltet."
  - "Gegeben *next* , lösche alle Paare der Form [*next, y*] aus *auflagen*.

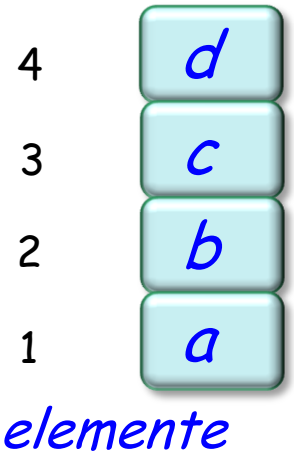
Schema des Algorithmus (ohne Invariante und Variante)

```
führe_aus
    do
        from create {...} sortiert.make  until
            "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        end
        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

Datenstruktur 1: *elemente* repräsentieren

elemente: *ARRAY* [*G*]

-- (Ersetzt die ursprüngliche Liste)



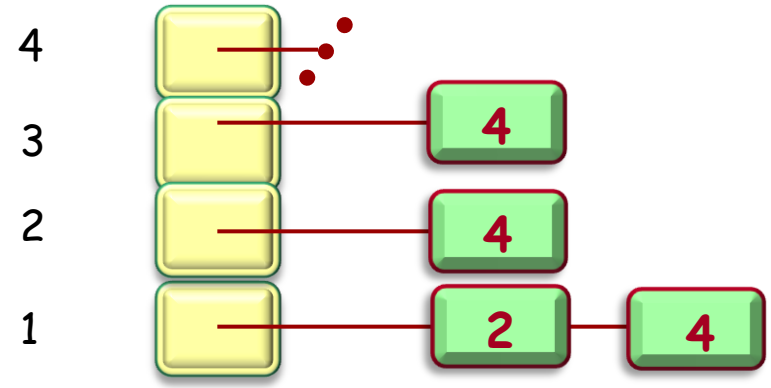
elemente = {*a*, *b*, *c*, *d*}

auflagen = {[*a*, *b*], [*a*, *d*], [*b*, *d*], [*c*, *d*]}

Datenstruktur 2: *auflagen* repräsentieren

nachfolger : *ARRAY* [*LINKED_LIST* [*INTEGER*]]

-- Elemente, die *nach* einem bestimmten Element
-- vorkommen müssen.



nachfolger

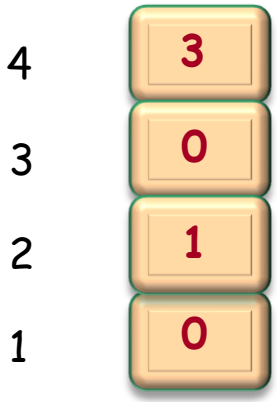
elemente = {*a*, *b*, *c*, *d*}

auflagen = {[*a*, *b*], [*a*, *d*], [*b*, *d*], [*c*, *d*]}

Datenstruktur 3: *auflagen* repräsentieren

vorfahren_zahl : *ARRAY* [*INTEGER*]

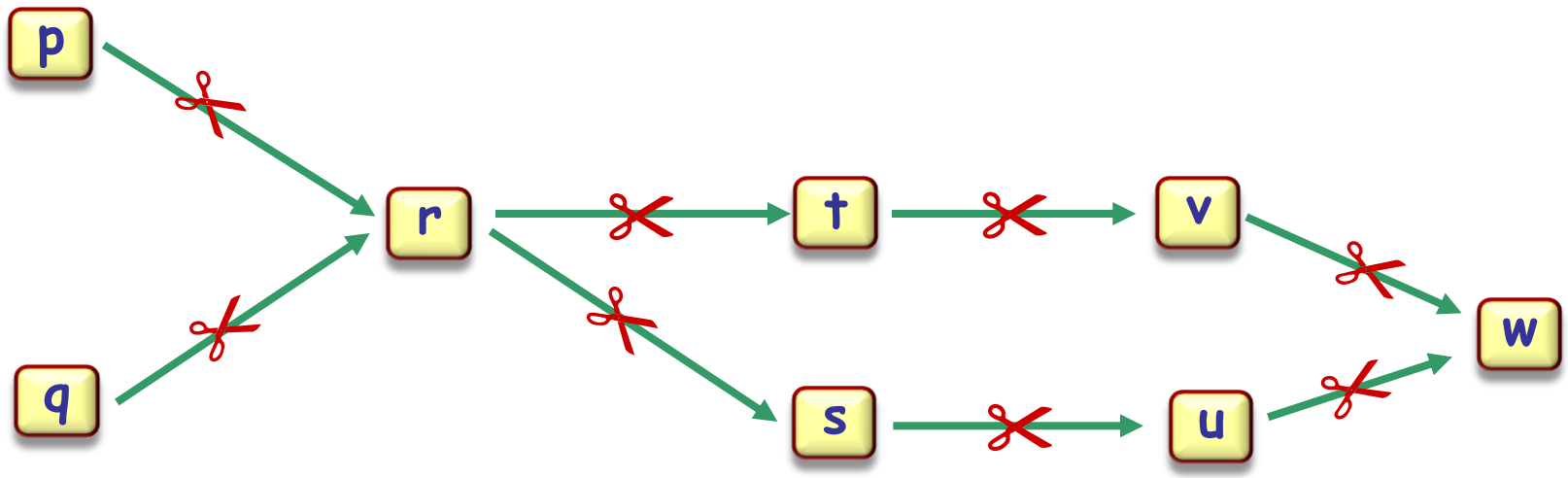
-- Anzahl der Elemente, die *vor* einem bestimmten
-- Element vorkommen müssen.



elemente = {*a*, *b*, *c*, *d*}

auflagen = {[*a*, *b*], [*a*, *d*], [*b*, *d*], [*c*, *d*]}

Die Grundidee (nochmals)



topsort

Einen „Kandidaten“ finden (Element ohne Vorfahren)

```
führe_aus
  do
      from create {...} sortiert.make  until
          "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
      loop
          next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
          sortiert.extend (next)
          "Lösche next aus elemente"
          "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
      end

      if "Keine Elemente übrig" then
          "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
      else
          "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
      end
  end
```

Einen Kandidaten finden (1)

Wir implementieren

next := "Ein Element von *elemente* ohne Vorfahren"

als:

Sei *next* ein noch nicht abgearbeiteter Integer, so dass *vorfahren_zahl*[*next*] = 0

Dies benötigt **O** (*n*) zum Suchen durch alle Indices: schlecht!

Aber Moment...

Nachfolger löschen

```
führe_aus
    do
        from create {...} sortiert.make  until
            "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        end

        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

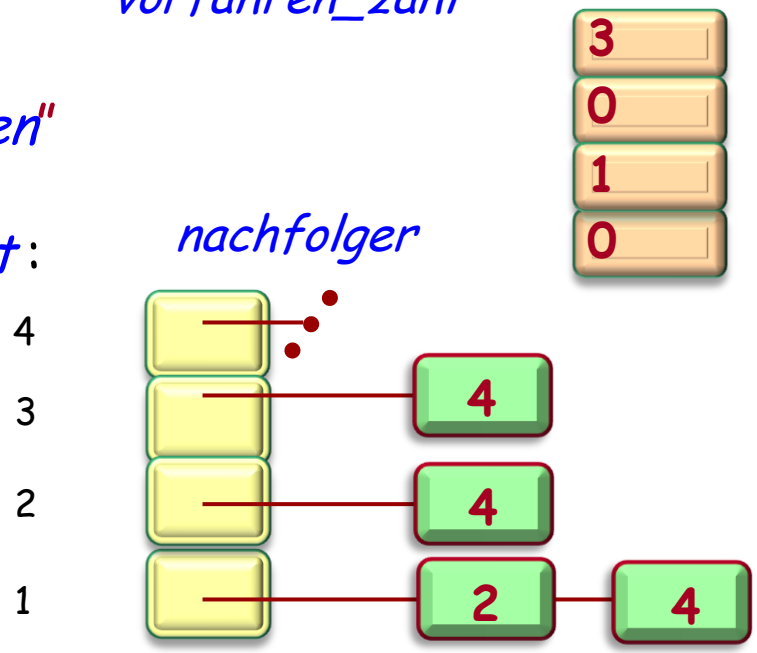
Nachfolger löschen

Wir implementieren

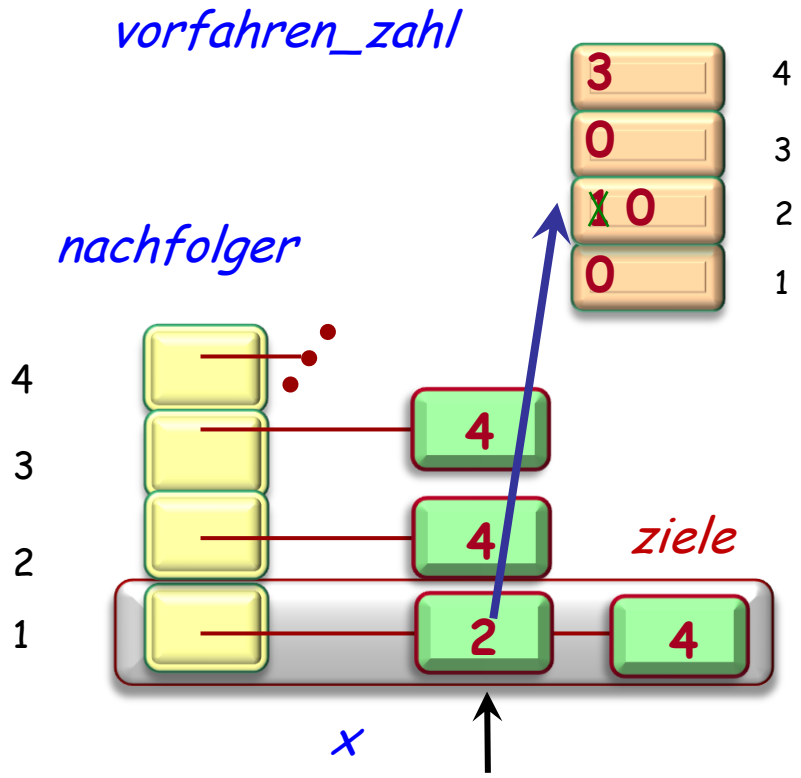
"Lösche alle Paare [*next*, *y*] aus *auflagen*"

als Schleife über alle Nachfolger von *next*:

```
ziele := nachfolger [next]
from ziele.start until
    ziele.after
loop
    x := ziele.item
    vorfahren_zahl [x] := vorfahren_zahl [x] – 1
    ziele.forth
end
```

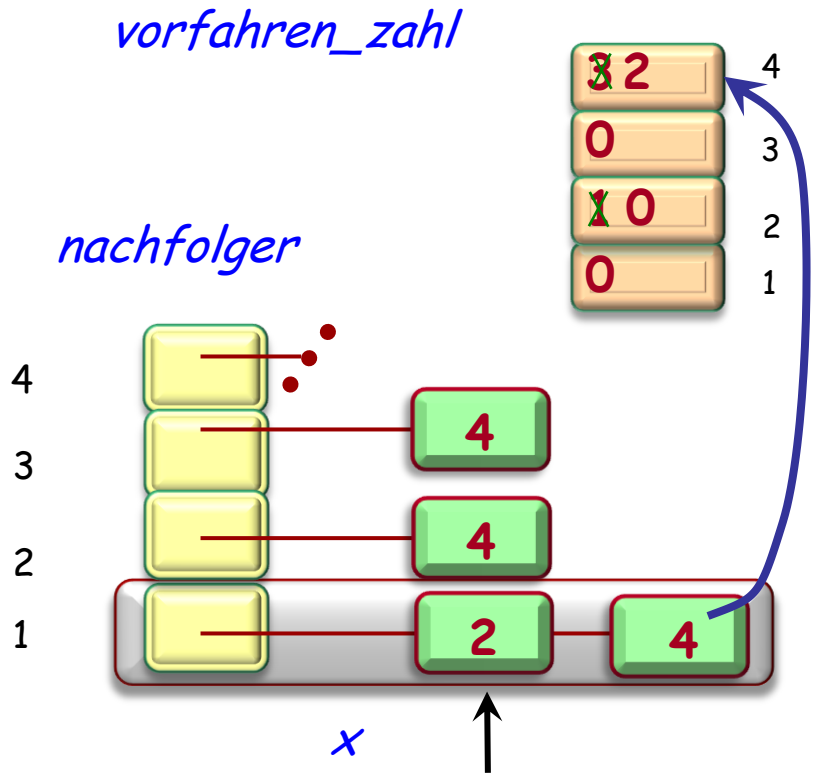


Nachfolger löschen



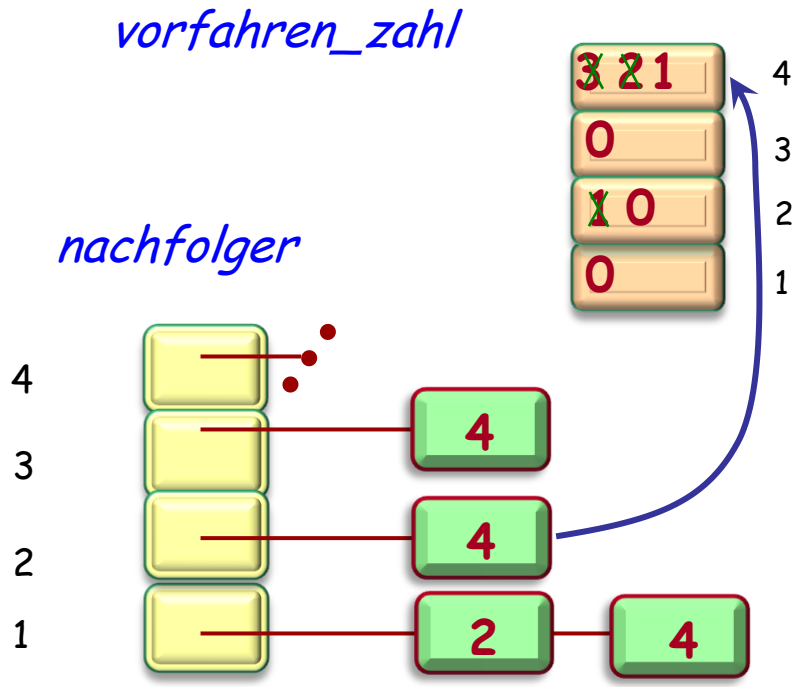

```
ziele := nachfolger [next]
from ziele.start until
        ziele..after
loop
    x := ziele.item
        vorfahren_zahl [x] := vorfahren_zahl [x] - 1
        ziele.forth
end
```

Nachfolger löschen



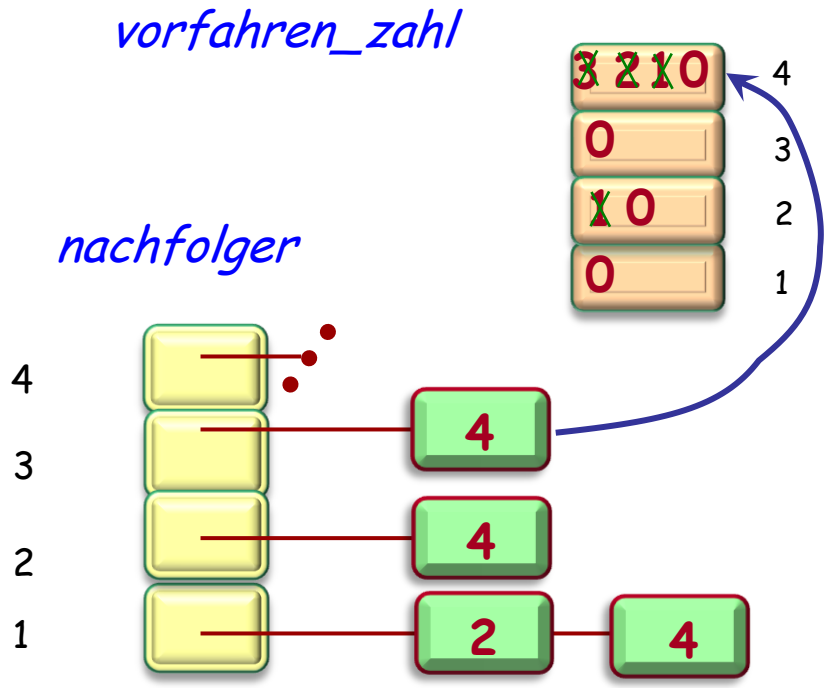

```
ziele := nachfolger [next ]
from ziele..start until
        ziele..after
loop
    x := ziele..item
    vorfahren_zahl [x ] := vorfahren_zahl [x ] - 1
    ziele..forth
end
```

Nachfolger löschen




```
ziele := nachfolger [next ]
from ziele..start until
        ziele..after
loop
        x := ziele..item
        vorfahren_zahl [x ] := vorfahren_zahl [x ] - 1
        ziele..forth
end
```

Nachfolger löschen




```
ziele := nachfolger [next ]
from ziele..start until
        ziele..after
loop
        x := ziele..item
        vorfahren_zahl [x ] := vorfahren_zahl [x ] - 1
        ziele..forth
end
```

Schema des Algorithmus

```
führe_aus
    do
        from create {...} sortiert.make  until
            "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        end

        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

Einen Kandidaten finden (1)

Wir implementieren

next := "Ein Element von *elemente* ohne Vorfahre"

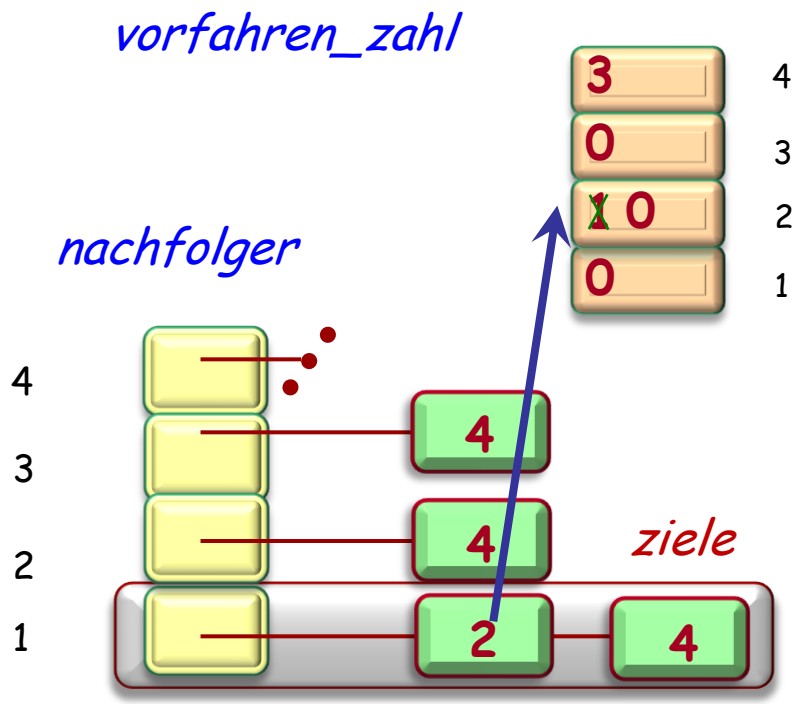
als:

Sei *next* ein noch nicht abgearbeiteter Integer, so dass
vorfahren_zahl[*next*] = 0

Wir haben gesagt:

- "Es scheint ***O*** (*n*) zu benötigen, um durch alle Indizes zu iterieren, aber Moment mal…"

Nachfolger löschen




```
ziele := nachfolger [next]
from ziele.start until
     ziele.after
loop
     x := ziele.item
     vorfahren_zahl [x] := vorfahren_zahl [x] - 1
     ziele..forth
end
```

Einen Kandidaten finden (2): auf der Stelle

Wir ergänzen

```
vorfahren_zahl [x] := vorfahren_zahl [x] – 1
```

mit:

```
if vorfahren_zahl [x] = 0 then
                    -- Wir haben einen Kandidaten gefunden!
            kandidaten.put (x)
end
```

Datenstrukturen 4: Kandidaten

kandidaten: *STACK*[*INTEGER*]
-- Elemente ohne Vorfahren

Anstelle eines Stapels kann *kandidaten* auch eine andere Dispenser-Datenstruktur sein, z.B. ein Warteschlange

Die Wahl wird bestimmen, welche topologische Sortierung wir erhalten, falls es mehrere Möglichkeiten gibt.

Schema des Algorithmus

```
führe_aus
    do
        from create {...} sortiert.make  until
            "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        end

        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente."
        end
    end
```

Einen Kandidaten finden (2)

Wir implementieren

next := "Ein Element von *elemente* ohne Vorfahren"

falls *kandidaten* nicht leer ist, als:

next := *kandidaten.item*

Schema des Algorithmus

```
führe_aus
    do
        from create {...} sortiert.make  until
            "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        end
        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

Einen Kandidaten finden (3)

Wir implementieren die Abfrage

Jedes Element von *elemente* hat einen Vorfahren

als

not *kandidaten.is_empty*

Um die Abfrage "Keine Elemente übrig" zu implementieren, merken wir uns die Anzahl der abgearbeiteten Elemente und vergleichen diese am Ende mit der ursprünglichen Anzahl Elemente

Erinnerung: die benötigten Operationen (*n* mal)

- Herausfinden, ob es ein Element ohne Vorfahren gibt. (Und dann eines davon nehmen.)
- Ein gegebenes Element von der Menge der Elemente entfernen.
- Alle Bedingungen, die mit einem gegebenen Element beginnen, aus der Menge der Bedingungen entfernen.
- Herausfinden, ob noch ein Element vorhanden ist.

Zyklen detektieren

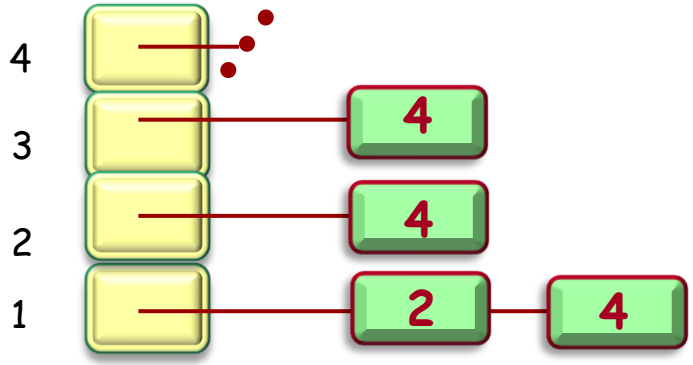
```
führe_aus
    do
        from create {...} sortiert.make  until
            "Jedes Element von elemente hat einen Vorfahren"
        loop
            next := "Ein Element von elemente ohne Vorfahren"
            sortiert.extend (next)
            "Lösche next aus elemente"
            "Lösche alle Paare [next, y] aus auflagen"
        end
        if "Keine Elemente übrig" then
            "Berichte, dass das topologische Sortieren abgeschlossen ist"
        else
            "Melde Zyklen in den übrigen auflagen und elemente"
        end
    end
```

Zyklen detektieren

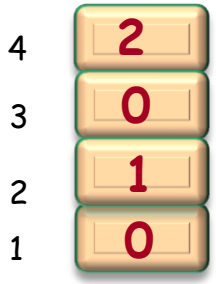
Um die Abfrage "Keine Elemente übrig" zu implementieren, merken wir uns die Anzahl der abgearbeiteten Elemente und vergleichen diese am Ende mit der ursprünglichen Anzahl Elemente.

Datenstrukturen: Zusammenfassung

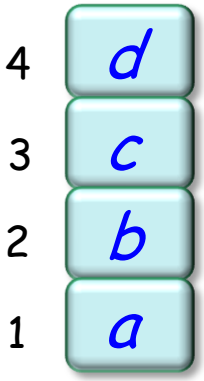
elemente: *ARRAY*[*G*]
-- Elemente, Ordnung abhängig
-- von Bedingungen
-- (Ersetzt die ursprüngliche Liste)



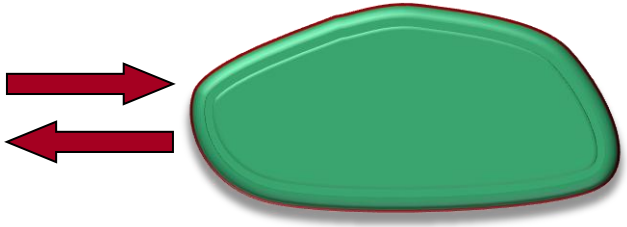
nachfolger: *ARRAY*[*LINKED_LIST*[*INTEGER*]]
-- Elemente, die nach einem bestimmten Element
-- vorkommen müssen



vorfahren_zahl: *ARRAY*[*INTEGER*]
-- Anzahl Elemente, die vor einem
-- bestimmten Element vorkommen müssen



kandidaten: *STACK*[*INTEGER*]
-- Elemente ohne Vorfahren



Initialisierung

Alle Elemente und alle Bedingungen müssen abgearbeitet werden, um diese Datenstrukturen zu erzeugen.

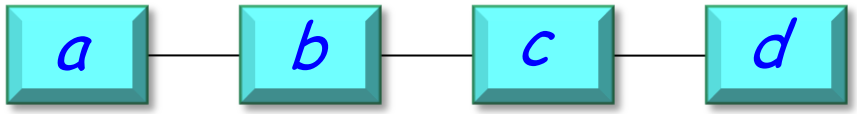
Dies ist $O(m + n)$.

Dies gilt auch für den restlichen Algorithmus.

Datenstrukturen 1: ursprünglich

elemente = {*a*, *b*, *c*, *d*}
auflagen = {[*a*, *b*], [*a*, *d*], [*b*, *d*], [*c*, *d*]}

elemente



n Elemente

auflagen

m Bedingungen

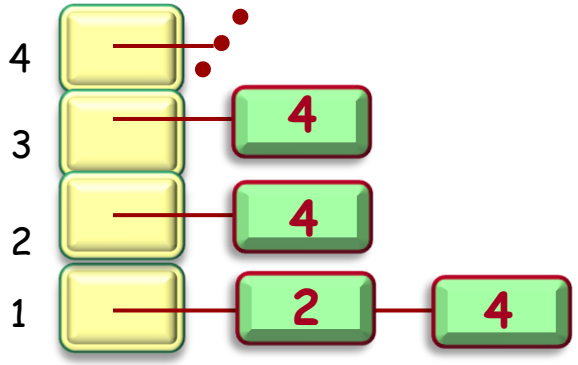
Effizienz: Das Beste, das wir uns erhoffen können:

Wenn wir *elemente* und *auflagen* wie gegeben verwenden, können wir **O** (*m* + *n*) nicht erreichen!

Datenstrukturen 2

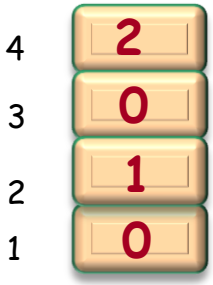
elemente: *ARRAY*[*G*]

-- Elemente, Ordnung abhängig
-- von Bedingungen
-- (Ersetzt die ursprüngliche Liste)



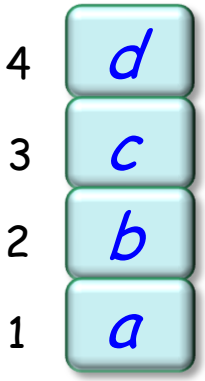
nachfolger: *ARRAY*[*LINKED_LIST*[*INTEGER*]]

-- Elemente, die nach einem bestimmten Element
-- vorkommen müssen



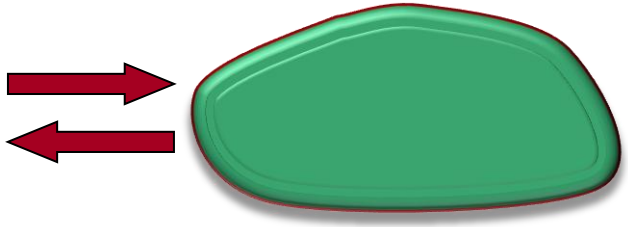
vorfahren_zahl: *ARRAY*[*INTEGER*]

-- Anzahl Elemente, die vor einem
-- bestimmten Element vorkommen müssen



kandidaten: *STACK*[*INTEGER*]

-- Elemente ohne Vorfahren



Programmübersetzung: eine nützliche Heuristik.

Die Datenstruktur ist, so wie sie gegeben ist, meist nicht die geeignetste für einen spezifischen Algorithmus.

Um einen effizienten Algorithmus zu erhalten, müssen wir sie in eine speziell geeignete Form bringen.

Wir können dies "übersetzen" der Daten nennen.

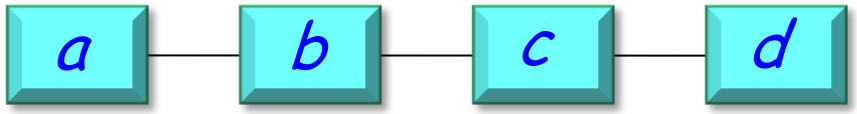
Oft ist diese „Übersetzung" (Initialisierung) genauso teuer wie das wirkliche Abarbeiten, manchmal sogar noch teurer. Aber dies stellt kein Problem dar, falls es die Gesamtkosten reduziert.

Eine weitere Lektion

Es kann durchaus OK sein, Informationen in unseren Datenstrukturen zu duplizieren

Ursprüngliche Datensgtrukturen: ohne duplizierten Information

elemente



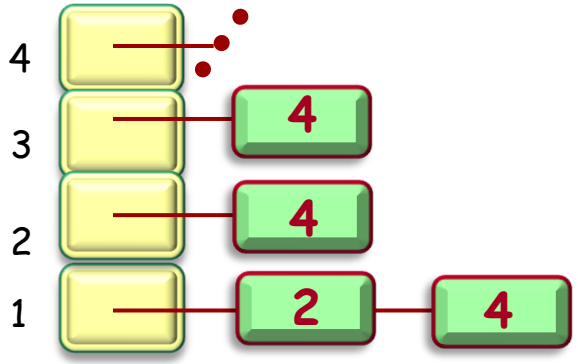
n Elemente

auflagen

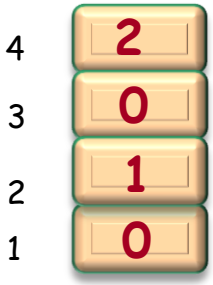
m Bedingungen

Datenstrukturen: mit duplizierter Information

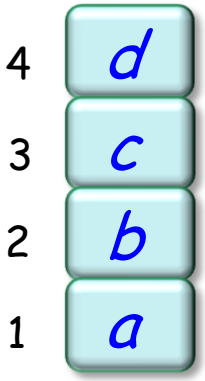
elemente: *ARRAY*[*G*]
-- Elemente, Ordnung abhängig von Bedingungen
-- (Ersetzt die ursprüngliche Liste)



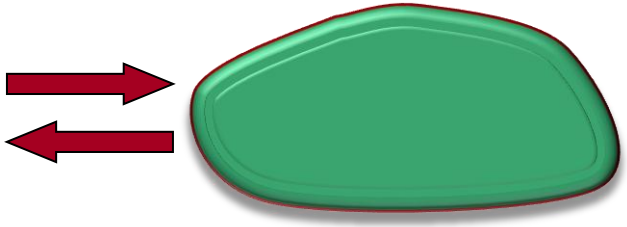
nachfolger: *ARRAY*[*LINKED_LIST*[*INTEGER*]]
-- Elemente, die nach einem
-- bestimmten Element vorkommen müssen



vorfahren_zahl: *ARRAY*[*INTEGER*]
-- Anzahl Elemente, die vor einem
-- bestimmten Element vorkommen müssen



kandidaten: *STACK*[*INTEGER*]
-- Elemente ohne Vorfahren



Schlüsselkonzepte

- Ein sehr interessanter Algorithmus, der für verschiedenste Anwendungen nützlich ist.
- Mathematische Basis: Binäre Relationen
- Transitive Hülle, reflexive transitive Hülle
- Algorithmus: Datenstrukturen anpassen ist der Schlüssel zum Erfolg
- "Übersetzungs"strategie
- Initialisierung kann genauso teuer sein wie das eigentliche Abarbeiten
- Der Algorithmus ist nicht genug: Wie brauchen ein API (praktisch, erweiterbar, wiederverwertbar)
- Dies ist der Unterschied zwischen Algorithmen und Software-Engineering

Lektion in Sachen Software-Engineering

Gute Algorithmen sind nicht genug.

Wir müssen eine Lösung mit einer klaren Schnittstelle (API) zur Verfügung stellen, die einfach zu benutzen ist.

Muster (Patterns) in Komponenten überführen.